Physikalische Zeitschrift

Begründet von **E. Riecke** und **H. Th. Simon**

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von **Johannes Stark**

Herausgegeben von

Prof. Dr. **P. Debye**, in Leipzig
Prof. Dr. **F. Harms**, in Würzburg

und

Prof. Dr. **R. Seeliger**
in Greifswald

NEUNUNDZWANZIGSTER JAHRGANG
1928

Mit 3 Tafeln

Verlag von S. Hirzel in Leipzig
1928

530.5
P 5691
v.29

WITHDRAWN
from
OBERLIN COLLEGE
LIBRARY

Druck von August Pries in Leipzig

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 1 — 1. Januar 1928 — Redaktionsschluß für Nr. 3 am 10. Januar 1928 — 29. Jahrgang

INHALT:

Zusammenfassende Berichte:

A. Kühl, Über den Einfluß des Grenzkontrastes auf Präzisionsmessungen. S. 1.

Originalmitteilungen:

F. Ahlborn, Die Theorie der diskontinuierlichen Flüssigkeitsbewegungen und die Wirklichkeit. S. 34.

T. Oryng, Über die Bilder im Winkelspiegel. S. 41.

R. Gans, Über Chromasie. S. 43.

Besprechungen:

A. G. Webster, Partial differential equations for mathematical physics. S. 46.

K. K. Darrow, Introduction to Contemporary Physics. S. 47.

L. Prandtl u. A. Betz, Ergebnisse der Aërodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. S. 48.

K. Goldschmidt, Aluminothermie. S. 48.

Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1927/28. Nachtrag. S. 48.

Personalien. S. 48.

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE.

Über den Einfluß des Grenzkontrastes auf Präzisionsmessungen.

Von A. Kühl.

Inhalt.

Einleitung.
I. Das Kontrastgesetz.
II. Die Kontrastfunktion an Beugungsbildern.
1. Allgemeines.
2. Numerischer Verlauf.
a) Ausgangsmaterial.
b) Der Lichtpunkt.
c) Die Halbebene und der gerade Streifen.
d) Die Kreisscheibe.
e) Der Keil.
f) Zusammenfassung.
III. Die Bildgrenze.
1. Ableitung der Definition.
a) Seeligers Modellmessungen.
b) Messung an geradlinigen Streifen.
2. Messung mit Mikrometerfaden.
a) Die Kreisscheibe.
b) Der Lichtpunkt.
3. Doppelbilder.
a) Doppelsterne.
b) Doppelkeile.
4. Messung mit Doppelbildmikrometer.
IV. Schluß.
Quellenverzeichnis.

Einleitung.

Es ist eine längst bekannte und nicht weiter verwunderliche Tatsache, daß die gesehene Begrenzungslinie eines Netzhautbildes nie oder doch nur selten genau mit der Begrenzung übereinstimmt, welche man nach den Regeln der geometrischen Optik konstruiert. Zwei Wege sind eingeschlagen worden, um über die Gesetze dieser Abweichungen Klarheit zu erhalten, wobei allerdings diese Sonderfrage teils nicht immer klar als Ziel erkannt wurde, teils nicht das ausschließliche Ziel der einschlägigen Arbeiten bildete. Der eine — besonders von der physiologischen Optik bevorzugte Weg — ist wesentlich ein Versuch, die Frage erfahrungsmäßig, also durch umfangreiche Sammlung von Beobachtungen zu lösen, während der andere — vor allem von Physikern und Astronomen beschrittene Weg — die theoretische Errechnung der Lichtstärke in jedem Bildpunkt, also die Ausbildung der Beugungstheorie und ihre Anwendung auf optische Instrumente zum Inhalt hat. Der Weg der physiologischen Optik hat zu eingehender Kenntnis der Empfindungsweise des Auges gegenüber verschiedenartigsten Belichtungsbedingungen, vor allem, was hier wichtig ist, zur Entdeckung der Kontrastempfindungen geführt, und damit in gewisser Weise die qualitative Lösung ergeben. (I, § 36, II, 10 oben[1]). Die Zurückführung aller Beobachtungstatsachen auf ein einheitliches Grundprinzip mußte ihr allerdings versagt bleiben[2]), weil sie die Vorbedingung quantitativer Untersuchungen auf diesem Gebiet, die Resultate der Beugungstheorie, so gut wie vollständig vernachlässigte. Die theoretische Optik, d. h. die Beugungstheorie, hat zwar nach Durchbildung der Rechnungsmethoden die objektive Lichtverteilung für die Brennebenen-

1) Die römischen Ziffern beziehen sich auf die Reihenfolge im Literaturverzeichnis am Schluß.

2) E. Hering, der wohl das größte Verdienst um die Förderung des Problems hat und auch die qualitative Lösung gab (a. a. O. S. 150 oben), kannte und würdigte zwar durchaus die Arbeiten Machs, aber er verwarf — m. E. leider — seine wertvolle formale Behandlung des Problems, um sie durch seine Theorie der Induktion zu ersetzen, die in der vorhandenen Form für die quantitative Behandlung wenig günstig, wenn nicht ungeeignet ist.

(oder Netzhaut-)bilder einer Reihe verschieden gestalteter Objekte zahlenmäßig dargestellt, vermochte aber ebensowenig zur einwandfreien Darstellung der Beobachtungen zu gelangen, weil sie noch keine Möglichkeit sah, die Resultate der physiologischen Optik quantitativ zu verarbeiten, denn eine im eigentlichen Sinne objektive Bildbegrenzung läßt sich gar nicht angeben (III. Kap. 5, IV. Kap. 17). Die vereinigende Brücke zwischen beiden Gebieten wurde im Jahre 1865 zuerst von E. Mach durch die sogleich zu besprechenden Arbeiten betreten und da — wie er selber in der „Analyse der Empfindungen" (V. 139, 11) hervorhebt — seine Veröffentlichungen wenig bekannt wurden, 30 Jahre später nochmals unabhängig von Seeliger (VI. Kap. 2[1])). Mach wäre vielleicht auch zur Anwendung des von ihm entdeckten Kontrastgesetzes auf die Erklärung der Bildbegrenzung gekommen, wenn er die im Schlußsatz seiner 4. Abhandlung über die Kontrasterscheinungen (VII, d 9) ausgesprochene Absicht zur Untersuchung des Gestaltensehens durchgeführt hätte. Es ist fast erstaunlich, wenn auch angesichts dringenderer Aufgaben verständlich, daß bis heute dieses für die Deutung präziser Beobachtungen so wichtige Problem von seiten der Physiker und Astronomen, erst vereinzelt beachtet wird, — erstaunlich, weil jede eingehendere Behandlung der Theorie des Fernrohrs oder ähnlicher Beobachtungsinstrumente schon durch die zwischen Theorie und Beobachtung bestehenden Widersprüche, die Struve a. a. O. so beredt hervorhebt, immer wieder auf diese Lücke hinweist — erstaunlich auch, weil die beobachtende Astronomie, Physik und Astrophysik sich seit Jahren um den Nachweis von Erscheinungen mühen, die der Kontrasteffekt in numerisch ableitbaren Beträgen fälschen, ja völlig verschleiern kann.

Eine kurze Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen und bisherigen Erfolge der Kontrastbeobachtung bei der Vermessung optischer Bilder wird dies näher beleuchten.

1) Interessante Erstbeobachtungen über auffällige Kontrasterscheinungen und experimentelle Beiträge zu ihrer Aufklärung wurden — vielfach ohne Kenntnis der Prioritäten — auch von anderen Autoren veröffentlicht: H. Haga und C. H. Wind, Beugung der Röntgenstrahlen, Wiedem. Ann. **68**, 1899. — C. H. Wind, Zur Demonstration einer von E. Mach entdeckten opt. Täuschung. Physik. Zeitschr. **1**, 112. — A. v. Obermayer, Über die lichten Säume um die Bilder dunkler Gegenstände auf hellem Hintergrunde. Eders Jahrb. f. Photogr. u. techn. Reprod. 1900. — A. Lemann, Über Schattenphänomene bei Finsternissen. Abh. der Zeitschr. „Das Weltall", Heft IV, Berlin 1902. — K. Groes-Petersen, Über Schatten während der Sonnenfinsternis. Astron. Nachr. 1913, Nr. 4697. — Zur Abgrenzung der Erscheinung vgl. auch A. Kühl, Die photogr. Umrißzeichnung. Zeitschr. f. wissenschaftl. Photographie. Leipzig 1914, Heft 1, Bd. XIV.

I.

Das Kontrastgesetz.

Unter dem Titel: „Die physiologische Wirkung räumlich verteilter Lichtreize auf die Netzhaut", veröffentlichte Mach in den Jahren 1865—68 in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie vier Abhandlungen (VII, a—d), um eine Reihe von eigentümlichen Erscheinungen, die ihm zunächst zufällig bei der Beobachtung rotierender Scheiben aufgefallen waren, nach zahlreichen Versuchen systematisch aufzuklären, bis ihm als Frucht seiner Arbeit die Entdeckung des Kontrastgesetzes gelang.

Ein typisches Beispiel für die gedachte Erscheinung wird z. B. erhalten, wenn man die in Fig. 1 skizzierte Kreisscheibe in schnelle

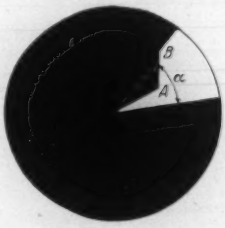

Fig. 1.
Kreissektor zur Erzeugung von Kontrastlinien.

Rotation versetzt. Dabei wird nämlich in der radialen Entfernung des Punktes A des weißen Sektors eine ziemlich scharfe dunkle Linie gesehen, in der radialen Entfernung des Punktes B dagegen eine ähnlich scharfe helle Linie. Beide Linien haben in der objektiven Lichtverteilung offenbar keine Begründung, denn da die Lichtstärke in jeder Entfernung vom Mittelpunkt der rotierenden Scheibe proportional dem Öffnungswinkel α des Sektors ist, so würde die Lichtstärke als Funktion von r etwa dargestellt durch einen der Fig. 2 ähnlichen Linienzug, in welchem

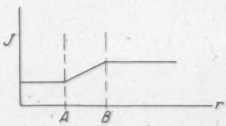

Fig. 2.
Die Intensitätskurve längs eines Radius des rotierenden Sektors Fig. 1.

die Knickstellen den Entfernungen der Punkte A und B entsprechen. Außer den auffälligen „Kontraststreifen", wie wir die Erscheinung der hellen

und dunklen Linien gleich nennen wollen, zeigt sich, daß der lineare Intensitätsanstieg zwischen A und B vom Auge kaum bemerkt wird, solange er nicht besonders steil erfolgt, sondern daß das Auge den Streifen zwischen A und B nahezu von konstanter mittlerer Helligkeit empfindet. Würde man zu der Intensitätskurve der Fig. 2 die zugehörige Empfindungskurve konstruieren, so würde sie also etwa die Form der Fig. 3 erhalten.

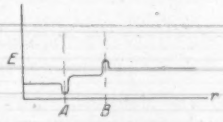

Fig. 3.
Die Empfindungskurve zur Intensitätskurve Fig. 2 (schematisch).

Das Auftreten der Kontraststreifen ist nicht an das Vorhandensein einer Unstetigkeit des ersten Differentialquotienten der Intensitätskurve (wie in Fig. 2) gebunden, sondern bleibt bestehen, wenn statt der Knickungen stärkere Krümmungen der Intensitätskurve vorkommen, d. h. wenn sowohl der erste wie der zweite Differentialquotient zwar stetig bleiben, letzterer aber stellenweise besonders große Werte annimmt, eine Tatsache, die von Seeliger (VI, Kap. 2) durch zahlreiche ähnliche Versuche bestätigt wurde.

Soweit lassen sich die Beobachtungen mit Machs eigenen Worten zunächst dahin zusammenfassen (VII. b, 131):

„Denken wir uns die Netzhaut als Ebene und ihre Beleuchtungsintensität von Stelle zu Stelle beliebig wechselnd, tragen wir an jeder Stelle eine der Lichtintensität proportionale Ordinate auf und verbinden wir die Endpunkte sämtlicher Ordinaten, so entsteht eine Fläche, welche ich objektive Lichtintensitätsfläche oder kurz Lichtfläche nenne.

Tragen wir jetzt auf derselben Netzhaut an jeder Stelle eine Ordinate auf, welche der dieser Stelle entsprechenden Lichtempfindungsintensität proportional ist, so entsteht eine andere Fläche, die ich subjektive Lichtintensitätsfläche oder kurz Empfindungsfläche nennen will.

Die beiden Flächen, die Lichtfläche und die Empfindungsfläche sind im allgemeinen verschieden. Sie sind sich ähnlich, aber nicht im Sinne der Geometrie. Sie sind sich insofern ähnlich, als die eine ein verzerrtes Bild der anderen darstellt. Die Geometrie könnte sie auch nicht affin, sondern nur kollinear nennen.

Es bestehen jedoch ziemlich einfache Beziehungen zwischen beiden Flächen, welche die Physiologie festzustellen hat. Zunächst bemerken wir unter der Voraussetzung der Gültigkeit des Fechnerschen Gesetzes, daß die Ordinaten der Lichtfläche den Lichtintensitäten proportional, die Ordinaten der Empfindungsfläche aber den Logarithmen der Lichtintensität proportional seien. Das letztere ist aber nur beiläufig wahr. Es ist noch eine Korrektion hinzuzufügen, die wir sofort in Betracht ziehen wollen.

Ein spezieller Fall wurde bereits in der älteren Arbeit untersucht. Wenn nämlich die Lichtintensität auf der Netzhautebene nur parallel zu einer in derselben gelegenen Geraden, also nur nach einer Richtung variiert, so wird die Lichtfläche zu einer Zylinderfläche und dasselbe geschieht mit der Empfindungsfläche. Wir können uns in diesem Falle auf die Untersuchung der beiden Leitkurven beschränken und nennen die der Lichtfläche angehörige die Lichtkurve, die Leitkurve der Empfindungsfläche aber nennen wir Empfindungskurve.

Die Erfahrung lehrt nun, daß die Größe der Ordinaten der Empfindungskurve nicht bloß von den entsprechenden Ordinaten der Lichtkurve, sondern auch von der Krümmung an den betreffenden Stellen abhängt."

Für den Übergang zu quantitativ formulierten Folgerungen sind drei weitere Beobachtungstatsachen von einschneidender Bedeutung. (VII a, 311.)

1. Die Kontraststreifen sind bei allen Beleuchtungsintensitäten, bei welchen überhaupt noch gesehen wird, gleich deutlich, d. h. sie bleiben unverändert, wenn die Lichtkurve $i = f(x)$ übergeht in

$$i = q \cdot f(x),$$

wo q ein positiver Proportionalitätsfaktor ist.

2. Die Kontraststreifen werden deutlicher, wenn die Ordinaten der Intensitätskurve um einen konstanten Betrag verringert werden; sie können dagegen zum völligen Verschwinden gebracht werden, wenn die Ordinaten um einen beträchtlichen konstanten Betrag erhöht werden, d. h. sie verschwinden, wenn die Lichtkurve $i = f(x)$ übergeht in die Kurve $i = p + f(x)$, wo p positiv und groß gedacht wird.

3. Die Kontraststreifen werden deutlicher, wenn die Krümmung der Lichtkurve verstärkt wird, d. h. ihre Deutlichkeit, bzw. die oben erwähnte Korrektion an dem nach dem Fechnerschen Gesetz erhaltenen Empfindungsordinaten ist eine direkte Funktion von $\frac{d^2 i}{dx^2}$.

Diese Feststellungen reichen weit genug, um eine den Beobachtungen genügende Erweiterung des Fechnerschen Gesetzes abzuleiten (VII a, 311 u. f.). Indessen ist ein anderer

Weg der Ableitung (VIId, 11 u. f.) so viel eleganter, daß diese drei Sätze nur zur Verifikation des Ergebnisses herangezogen werden sollen.

Machs Leitgedanke für die Ableitung folgt aus einer näheren Betrachtung des Fechnerschen Gesetzes. Dieses sagt bekanntlich aus, daß die Lichtempfindung des Auges den Intensitäts-Verhältnissen proportional läuft. Nun ist zweifelsohne die variable Irisöffnung schon eine Einrichtung, welche in gewisser Weise dem Erhalten konstanter Licht-Verhältnisse dienen könnte. Man braucht für strenge Erfüllung der Aufgabe z. B. nur anzunehmen, daß sie die Eigenschaft habe ihre Flächengröße stets so zu ändern, daß das Gesamtlicht auf der Netzhaut konstant bleibt. Allein die Iris kann sicherlich nicht alles leisten und so drängt sich schon aus der Form des Gesetzes die Vermutung auf — der durch die neueren Forschungen über Bau und Wirkung der Netzhautelemente durchaus nicht widersprochen wird (II, 6 letzter Absatz), — daß nicht der Anfangsreiz durch die Nervenleitungen einfach fortgepflanzt wird, bis er eine Empfindung auslöst, sondern, daß zwischen dem ersten Reiz auf die Netzhaut und dem letzten Reiz, der im Empfindungszentrum wirkt, eine Kette von Mechanismen liegt, die den ersten Reiz mannigfach modifizieren. Diese Mechanismen leisten wahrscheinlich die Aufgabe, die Reizintensitäten, die auf der Netzhaut auftreffen, gewissermaßen gegen das Gesamtlicht der Netzhaut „abzuschätzen" und nur nach Maßgabe ihres Stärken-Verhältnisses zum Empfindungszentrum fortzuleiten.

Ähnlich wie aus dem Fechnerschen Gesetz an sich eine Wechselwirkung der Netzhautelemente untereinander recht wahrscheinlich ist, so setzt das Auftreten der Kontrasterscheinungen (Reaktion auf die Krümmung der Lichtintensitätsfunktion) solche Wechselwirkung in kleinsten Netzhautbezirken voraus, wenn sie nicht unverständlich bleiben sollen. Zu ihrer Erklärung müßte allerdings dann die in obiger Art gedachte Mitwirkung der umgebenden Netzhautelemente mit der Entfernung vom betrachteten Element abnehmen.

Nennt man nach dieser Arbeitshypothese $\varphi(r)$ den Faktor, welcher die Stärke der Mitwirkung jedes in der Entfernung r gelegenen Elements dv reguliert, so wäre die „letzte" Erregung offenbar

$$e = i\,\frac{i\Sigma\varphi(r)\,dv}{\Sigma i_n\varphi(r)\,dv}.$$

Durch speziellere Versuche läßt sich zeigen, daß für die Kontraststreifen wesentlich nur die Mitwirkung der nächsten Umgebung des betrachteten Netzhautelements ist, woraus sich ergibt, daß die Funktion $\varphi(r)$, von einem höchsten Wert für $r = 0$ beginnend, rasch abfällt, um sich dann wahrscheinlich asymptotisch der Null zu nähern.

Läßt man vorläufig den asymptotisch verlaufenden Teil der Funktion $\varphi(r)$ beiseite, der nur Beiträge zweiter Ordnung für die Summe liefert, wenn die Intensitätsfunktion $i = f(x\,y)$ nicht bezirksweise ganz extreme Werte erreicht, was ausgeschlossen sein soll, so wäre $\varphi(r)$ etwa zu ersetzen durch eine Funktion $\psi(r)$, die mit r sehr schnell Null wird und in erster Näherung wäre dann:

$$e = i\,\frac{i\Sigma\psi(r)\,dv}{\Sigma i_n\psi(r)\,dv}.$$

Denkt man nun die Intensitätsfunktion $i = f(x\,y)$ für eine benachbarte Stelle $x + h, y + k$ entwickelt in der Form:

$$i(x+h, y+h) = i + \left(\frac{\partial i}{\partial x}h + \frac{\partial i}{\partial y}k\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}h^2 + 2\,\frac{\partial^2 i}{\partial x\,\partial y}hk + \frac{\partial^2 i}{\partial y^2}k^2\right)$$

und bedenkt, daß die Summe $\Sigma i_n\psi(r)\,dv$ durch die folgende Summe von Doppelintegralen ausgedrückt ist, — deren jedes sich über die Nachbarstellen in einem Quadranten der xy-Ebene erstreckt:

$$\sum i_n\psi(r)\,dv = \int\!\!\int i(x+h, y+k)\,\psi(\sqrt{h^2+k^2})\,dh\,dk + \int\!\!\int i(x+h, y-k)\,\psi(\sqrt{h^2+k^2})\,dh\,dk + \int\!\!\int i(x-h, y+k)\,\psi(\sqrt{h^2+k^2})\,dh\,dk + \int\!\!\int i(x-h, y-k)\,\psi(\sqrt{h^2+k^2})\,dh\,dk$$

so hat man nach Einsetzen der entwickelten Funktion und passender Zusammenziehung:

$$\sum i_n\psi(r)\,dv = 4i\int\!\!\int\psi(\sqrt{h^2+k^2})\,dh\,dk + 2\,\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}\int\!\!\int\psi(\sqrt{h^2+k^2})\,h^2\,dh\,dk + 2\,\frac{\partial^2 i}{\partial y^2}\int\!\!\int\psi(\sqrt{h^2+k^2})\,k^2\,dh\,dk.$$

Da $\psi(r)$ für merkliche Werte von $r = \sqrt{h^2+k^2}$ verschwindet, so kann unbedenklich hier die Integration von $0-\infty$ erstreckt werden, so daß die Integrale zu konstanten Faktoren werden. Wir setzen:

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty\psi(\sqrt{h^2+k^2})\,dh\,dk = m.$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(\sqrt{h^2+k^2})\, h^2\, dh\, dk = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(\sqrt{h^2+k^2})\, k^2\, dh\, dk = n$$

und erhalten:

$$e = i - \frac{4mi}{4mi + 2n\left(\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 i}{\partial y^2}\right)}.$$

Setzt man noch: $\frac{2n}{4m} = \frac{k}{2}$ und in gebräuchlicher Weise abkürzend die Summe $\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 i}{\partial y^2} = \Delta i$ so wird:

$$e = i - \frac{i}{i + \frac{k}{2}\Delta i} = \frac{i}{1 + \frac{k}{2}\frac{\Delta i}{i}} \qquad (1)$$

oder wenn $\frac{k}{2}\frac{\Delta i}{i}$ ein echter Bruch ist, bis auf Glieder zweiter Ordnung:

$$e = i - \frac{k}{2}\Delta i \qquad (1a)$$

wo $\Delta i = \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 i}{\partial y^2}$ ist.

Es ist leicht zu sehen, daß Gl. (1) und (1a) den drei wichtigen Beobachtungstatsachen von S. 3 entsprechen.

Da Gl. (1a) auch sonst die Kontrasterscheinungen, soweit sie bisher quantitativ verfolgt sind, gut dargestellt und für die Lehre vom Sehen von einschneidender Bedeutung ist, so wollen wir sie als das Machsche Kontrastgesetz bezeichnen, das in Worten nach Mach folgende Fassung erhält:

„Die Abweichung der Intensität einer Netzhautstelle vom Mittel der Umgebung wird deutlich empfunden und ladet demnach dem Sehorgan eine besondere Arbeit auf. Je nachdem diese Abweichung vom Mittel (Δi) positiv oder negativ ist, empfindet sich die Netzhautstelle dunkler oder heller als bei gleichmäßiger Beleuchtung der Nachbarstellen mit der ihr selbst entsprechenden Intensität."

Die Art der Ableitung beschränkt zwar die Gültigkeit der Formel (1a) auf jene Stellen der Lichtfläche, an denen die Krümmungsradien als groß gelten können gegenüber der Ausdehnung des „Mitempfindungsbereichs". Wenn wir sie trotzdem nach dem Vorgange von Mach allgemein der Untersuchung zugrunde legen, so sind einige begründende Bemerkungen unerläßlich. Das Wesentlichste ist zweifelsohne, daß das Kontrastgesetz in der Form (1a) von Mach zunächst als rein empirischer Ausdruck der Beobachtungstatsachen gefunden und immer wieder, soweit es damals möglich war, auch quantitativ bestätigt wurde, selbst in Fällen, in denen Δi sehr große Werte erhielt. Die hier wiedergegebene formale Ableitung hingegen bildete den Abschluß seiner Arbeiten (VII d) und stellt zunächst nicht mehr als einen Versuch zur Begründung einer Arbeitshypothese über die Wirkungsweise der Netzhaut dar. Soweit sich nun ein Widerspruch vorfindet in dem aus der Arbeitshypothese fließenden Ansatz gegenüber der Allgemeingültigkeit der empirisch erprobten Formel (1a), so muß dieser entschieden dahin gedeutet werden, daß die Arbeitshypothese der Korrektur bedarf.

Bei einer Verallgemeinerung der Benützung von (Gl. 1a) bleibt dann der Wert des Faktors $\frac{k}{2}$ natürlich — abgesehen von der Dimension — auch nicht mehr an den oben abgeleiteten Ausdruck gebunden, sondern muß nötigenfalls empirisch bestimmt werden. Ein Mittel dazu gibt die Beobachtung des Momentes $e = 0$, d. h. $i = \frac{k}{2}\Delta i$ nach einer der von Hering (I) für solche Fälle angewandten Vergleichsmethoden an die Hand. Sicher ist aus den Beobachtungserfahrungen, daß im allgemeinen der Einfluß des Gliedes $\frac{k}{2}\Delta i$ auf den Wert e erheblich stärker ist, als aus der Mach'schen Ableitung hervorzugehen scheint.

II.

Die Kontrastfunktion bei Beugungsbildern.

1. Allgemeines.

Denkt man sich als einfachstes Objekt die geradlinig begrenzte, mit überall konstanter Intensität leuchtende Halbebene, so zeigt auch bei idealer optischer Abbildung die Lichtfläche auf der Netzhaut aus beugungstheoretischen Gründen den bekannten, schon innerhalb der geometrisch-optischen Bildgrenze einsetzenden Lichtabfall, der sich mit wachsender Entfernung asymptotisch der Null nähert. Eine „objektive" Bildgrenze, die etwa durch die Isophote Null charakterisiert wäre, liegt also für dieses Objekt (und für jedes andere) genau genommen im Unendlichen und wollte man eine andere Isophote als objektive Bildgrenze definieren, so fände man keinen Anhaltspunkt für ihre Auswahl; m. a. W. eine objektive Bildgrenze gibt es eigentlich nicht. Die Schwierigkeiten, die hier auftreten und zur Hereinnahme physiologischer Überlegungen zwingen, werden treffend beleuchtet durch die von Struve und Strehl (III, Kap. 5, IV) gemachten Ausführungen. Strehl

verfiel dabei intuitiv auf den Ausweg, die Bildgrenze an den Ort der Wendetangente der Lichtkurve zu verlegen und nähert sich damit merklich den Tatsachen.

Das Kontrastgesetz lehrt, daß die Lichtempfindung formal einer Fläche bzw. Kurve der „letzten Erregung" entspricht, zu deren Konstruktion außer der objektiven Intensitätsfläche, bzw. -kurve (in dem Beispiel der Halbebene $= i[x]$) die Kenntnis von $\Delta i = \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$ nötig ist. Die Kurve Δi, die wir abkürzend als Kontrastkurve bezeichnen wollen, zeigt bei der Halbebene die

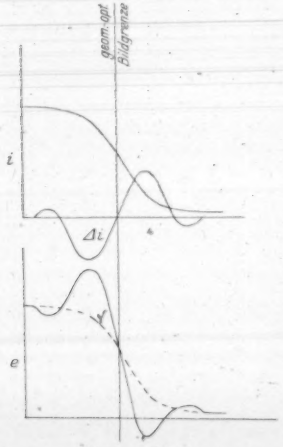

Fig. 4 u. Fig. 5.
4) Intensitätskurve und Kontrastkurve nahe dem Rande des Beugungsbildes der Halbebene.
5) Kurve der „letzten Erregung" zu Abb. 4 (schematisch).

in Fig. 4 dargestellte Form, d. h. sie oszilliert beiderseits des Ortes der geometrisch-optischen Bildgrenze, wo sie gleich Null ist, mit anfänglich starker, dann schnell verringerter, asymptotisch gegen Null konvergierender Amplitude um die Abszissenachse.

Wendet man die Form (1a) des Kontrastgesetzes auf das Beispiel an, indem man den unbekannten Proportionalitätsfehler $\frac{k}{2}$ beliebig wählt, so erhält die Kurve der „letzten Erregung" qualitativ die in Fig. 5 gezeichnete Gestalt. Die Ordinaten der Empfindungskurve, die nach dem Fechnerschen Gesetz im allgemeinen den Logarithmen der Ordinaten dieser Kurve proportional gesetzt werden, spiegeln ihren Lauf wider und besagen, daß die Empfindungsfläche der Halbebene mit einem besonders hellen Kontraststreifen hart innerhalb des geometrisch-optischen Bildrandes und einem besonders dunklen Kontraststreifen hart außerhalb desselben abschließt. Es drängt sich daher die Vermutung auf, daß die Bildbegrenzung nicht nur in diesem Falle, sondern ganz allgemein durch den Verlauf solch auffälliger Kontraststreifen, nicht aber durch irgendeine Isophote ohne hervorstechende Eigenschaft bestimmt wird.

Im Verfolg dieser Vermutung ist von Bedeutung, daß die größten absoluten Werte der Kontrastfunktion in den der geometrisch-optischen Begrenzung benachbarten Extremwerten vorkommen, d. h., daß die von den weiteren Oszillationen hervorgerufenen Kontraststreifen an Deutlichkeit weit hinter den beiden Hauptstreifen zurückbleiben. Die äußeren kleinen Oszillationen werden jedenfalls im allgemeinen überhaupt unsichtbar bleiben, weil die in ihrer Gegend vorhandene Intensität unter der Reizschwelle des Auges liegt. Durch die Beachtung der Kontraststreifen würden also greifbare Anhaltspunkte für die Bildbegrenzung tatsächlich immer in der Nähe der geometrisch-optischen Grenze zu suchen sein, was bei Beachtung der Isophoten nicht der Fall ist. Allerdings erhebt sich im Hinblick auf die im allgemeinen endliche Breite der Kontraststreifen sofort die Frage nach der besonderen Stelle der „Erregungsfläche", welche als Ort der Bildgrenze anzusehen ist. A priori könnten als irgendwie auffallende Stellen sowohl die Kurven der Erregungsmaxima und -minima als auch die Grenzen der beiden Kontraststreifen als mögliche Bildgrenzen in Betracht gezogen werden.

Nach der Form (1a) des Kontrastgesetzes hängt ihre Lage außer von der Intensitätsfunktion wesentlich vom Faktor $\frac{k}{2}$ ab, dessen numerische Größe bislang unbekannt ist. Da aber erfahrungsmäßig die Kontraststreifen schon bei kleinen Werten von Δi (z. B. Vergrößerung des Erdschattens bei Mondfinsternissen) recht auffällige Erscheinungen sind, also $\frac{k}{2}$ keineswegs als kleine Größe aufzufassen ist, so folgt zunächst, daß die Erregungsgröße e gegenüber dem lokalen Reiz i durch Subtraktion der Kontrastgröße $\frac{k}{2}\Delta i$ bei merkbaren Werten von Δi ganz wesentlich geändert wird. Beschränkt man weiter die Untersuchung, wie es im folgenden geschieht, auf die durch eine kreisförmige Öffnung erzeugten Beugungsbilder gleichförmig leuchtender Objekte, so zeigt die Intensitätsfläche allgemein innerhalb der geometrisch-optischen Grenze nahezu den Charakter einer

ebenen Fläche, die, nach geringfügiger Senkung gegen den Rand zu, fast plötzlich in einen steilen Abhang übergeht; und ähnlich ist der Übergang von diesem Steilhang in den nahezu wieder ebenen Verlauf der Intensitätsfläche weiter außen, m. a. W. die Extremwerte des Subtrahenden $\frac{k}{2}\Delta i$ treten in diesem Falle auf an Stellen, wo die Intensitätswerte noch nicht stark von den mittleren Intensitätswerten innerhalb des Bildes, bzw. nicht mehr stark von den mittleren Intensitätswerten weiter außerhalb des Bildes abweichen. Wenn also $\frac{k}{2}\Delta i$ bei merkbaren Werten von Δi verhältnismäßig groß angenommen werden darf gegenüber diesen Differenzen, so kann die Lage der Extremwerte der Erregungsfunktion e nur unwesentlich von der Lage der Extremwerte von Δi abweichen. Wichtig ist, darauf hinzuweisen, daß die Beschränkung auf gleichförmig leuchtende Objekte für diese Argumentation sicher ausreichend, aber nicht unbedingt nötig ist, denn auch die allmählich verlaufende Intensitätskurve des Erdschattens bei Mondfinsternissen, die im III. Abschnitt behandelt wird, zeigt dagegen keinen Widerspruch.

So wird die Funktion Δi selbst zur Indikatrix der Orte besonderer Kontrastverhältnisse und rechtfertigt dadurch die abkürzende Bezeichnung Kontrastfläche, wie den vorhin für die Kurve $\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$ gebrauchten Ausdruck „Kontrastkurve".

Damit ergibt sich ein Ausblick, der das Problem besonders interessant und wichtig gestaltet. Denkt man sich nämlich zwei Beugungsbilder einander bis nahe oder ganz zur Berührung der geometrisch-optischen Bilder genähert, so überdecken sich mehr oder weniger große Teile der äußeren „Abhänge" ihrer Lichtflächen. An jeder Stelle im überdeckten Gebiet herrscht, da im allgemeinen die Lichtschwingungen beider Bilder als inkohärent anzusehen sind, die Summe beider Lichtintensitäten. Die Fläche der letzten Erregung wird also in diesem Fall dargestellt durch

$$e = (i_1 + i_2) - \frac{k}{2}(\Delta i_1 + \Delta i_2)$$

und die Lage der Bildbegrenzung hängt ab von den Eigenschaften der Kontrastfläche $(\Delta i_1 + \Delta i_2)$. Da nun beide Summanden oszillierende Flächen bedeuten, so kann die Lage der Grat- und Tallinien der Summe erheblich verschoben sein gegenüber ihrer Lage in den beiden Summanden. Man gewahrt daraus, daß die Bildbegrenzungslinien durch das Zusammenwirken zweier benachbarter Bilder vermutlich mehr oder weniger starken Lageveränderungen unterworfen sind, eine Folgerung, die für alle Arten von Präzisionsmessungen von einschneidender Bedeutung werden muß.

Sehr auffällig muß diese Erscheinung hervortreten, wenn beide Bilder von stark verschiedener Intensität sind. Setzt man etwa $i_2 = \frac{i_1}{m}$, so wird auch $\Delta i_2 = \frac{\Delta i_1}{m}$ und die Kontrastfläche wäre etwa in der Form zu schreiben $\Delta i = \Delta i_1(x_1 y_1) + \frac{\Delta i_1(x_2 y_2)}{m}$, d. h. wenn m genügend groß ist, würden die Eigenschaften der Kontrastfläche des zweiten Bildes im überdeckten Raum ganz verwischt — die Bildgrenze des helleren Bildes schneidet, fast ohne Veränderungen zu erleiden, in das lichtschwächere Bild hinein.

Es bedarf kaum der Hervorhebung, daß gerade solche Beispiele durch die Messung am sichersten erfaßt werden können und daher als bester Prüfstein für die Theorie gelten müssen.

Die Umständlichkeit der numerischen Durchrechnung einzelner Beispiele läßt sich dabei nicht umgehen, denn daß die allgemeine Untersuchung der Funktion Δi für Beugungsbilder beliebig gestalteter, wenn auch gleichförmig selbstleuchtender ebener Lichtflächen wegen der mathematischen Schwierigkeiten undurchführbar bleibt, ist von vornherein aus dem gleichen Schicksal der Untersuchung der Intensitätsverteilung an Beugungsbildern sicher. Es mag indessen kurz auf eine mögliche Abkürzung späterer numerischer Rechnungen hingewiesen werden.

Das Fraunhofersche Beugungsbild eines durch eine kreisförmige Öffnung abgebildeten Lichtpunktes wird bekanntlich dargestellt durch die Formel:

$$\left.\begin{aligned} i(u) &= \left(\frac{2\pi r^2}{\lambda f}\right)^2 \left(\frac{J_1(u)}{u}\right)^2 \\ (u) &= \frac{2\pi r}{\lambda f} \cdot \varrho \end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

worin die Buchstaben folgende Bedeutung haben:

- r der Öffnungsradius (der Eintrittspupille) des optischen Instruments,
- f die Brennweite des optischen Instruments,
- λ die Wellenlänge des Lichtes, die wir im Mittel zu $589\,\mu\mu$ ansetzen,
- ϱ eine Längenausdehnung in der Brennebene,
- u eine dimensionslose Variable, deren Einheit wir abkürzend als „optische Einheit" (o. E.) bezeichnen,
- J_1 die Besselsche Funktion erster Ordnung.

Die Lichtfläche $i\,(u)$ stellt bekanntlich eine Rotationsfigur dar in Gestalt eines kegelförmigen

Mittelkörpers, der nach außen von niedrigen Ringwällen, den Beugungsringen, umgeben ist. Ihre Kontrastfläche ist gegeben durch:

$$\Delta i = \frac{d^2 i}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{di}{du} = \frac{2}{u^2}\left[J_2^2 + 2\frac{J_1 J_2}{u} - J_1^2\right]. \quad (3)$$

Damit könnten die Grenzlinien an Punktbildern aus den Eigenschaften der Besselschen Funktionen diskutiert werden, wie die Helligkeitsverteilung selbst.

Die Intensität in einem beliebigen Punkte des Bildes einer gleichförmig selbstleuchtenden ebenen Fläche wird als Integral über die zu diesem Punkt gelangenden Lichtanteile von allen Elementen der Fläche erhalten. Wegen des Rotationscharakters von $i\,(u)$ kann man auch sagen: die Intensität in einem beliebigen Punkte ist gleich dem Volumen, welches der über dem geometrisch-optischen Flächenbild errichtete gerade Zylinder aus der um jenen Punkt als Achsenfußpunkt angeordneten „Lichtmasse" $i\,(u)$ herausschneidet.

Für einen Punkt P ($\varrho = 0$, $u = 0$) dessen Intensität zu berechnen ist, hat man also etwa

$$I_P = \left(\frac{2\pi r^2}{\lambda f}\right)^2 \int_0^{w_1} dw \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} i(u)\,\varrho\, d\varrho$$

$$= r^2 \int_0^{w_1} dw \int_{u_0}^{u_1} \frac{J_1^2(u)}{u}\, du\,.$$

Die Integration nach w läßt sich noch allgemein ausführen, da $\int_0^u \frac{J_1^2(u)}{u}\, du = 1 - J_0^2 - J_1^2$ ist,

aber darüber hinaus ist man auf im allgemeinen langsam konvergierende Reihenentwicklungen angewiesen, so daß selbst Strehl (IV, 93), der sich mit vielen numerischen Rechnungen dieser Art beschäftigte, von Näherungsmethoden nach dem Beispiel Struves (III) abrät, um zur mechanischen Quadratur zu schreiten.

Da nun der Wert der Kontrastfunktion in beliebigem Punkte P sich aus der Summe aller von den Punkten der Lichtfläche herrührenden Kontrastwerte zusammensetzt und der Rotationscharakter nach (3) auch für $\Delta i(u)$ gilt, so hat man auch:

$$\left.\begin{aligned} \Delta I_P &= \left(\frac{2\pi r^2}{\lambda f}\right)^2 \int_0^{w_1} dw \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \Delta i(u)\,\varrho\, d\varrho \\ &= 2r^2 \int_0^{w_1} dw \int_{u_0}^{u_1} \frac{2J_2^2 + J_2 J_0 - J_1^2}{u}\, du \\ &= -2r^2 \cdot \int_0^{w_1} dw \left[\frac{J_1 J_2}{u}\right]_{u_0}^{u_1} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Wie der Ausdruck $(1 - J_0^2 - J_1^2)$ die Helligkeit im Zentrum einer kreisförmigen Lichtscheibe vom Radius u angibt, so bedeutet $-\frac{J_1 J_2}{u}$ gleichzeitig den Wert der Kontrastfunktion dortselbst.

Die zweite Integration von (4) bleibt dagegen ebenso unausführbar wie in I_P.

Immerhin sieht man aber so viel, daß es nicht unter allen Umständen nötig ist, die Lichtverteilung zu berechnen, sondern, daß man zur Untersuchung der Lage der Bildgrenzen direkt die Kontrastfunktion aufstellen und dadurch die numerischen Rechnungen erheblich abkürzen kann, wenn die Funktion $\frac{J_1 J_2}{u}$ einmal in ähnlichen Tabellen vorliegt, wie $(1 - J_0^2 - J_1^2)$.

Für unseren Zweck allerdings kann auf die Darstellung der Intensitätsverteilung, schon um den Verlauf der Bildgrenzen zu den Isophoten zu zeigen, nicht verzichtet werden und überdies ist, wie gesagt, zunächst die zu leistende numerische Rechenarbeit auf dem Umwege über die Intensitätsverteilung geringer, weil diese für manche Objekte schon vorliegt.

Schließlich sei in dieser Übersicht angesichts der aufgezeigten, theoretisch interessanten Erwartungen nicht unterlassen, ein Wort über die Grenze der praktischen Nachprüfung zu sagen, welche in der endlichen Ausdehnung der Zapfenelemente der Netzhaut ihren Grund hat.

Die Gesamtbreite des von den Kontraststreifen am Rande der Beugungsbilder bedeckten Raumes beträgt im allgemeinen weniger als 10 o. E., was bei größeren Instrumenten meist nur geringe Bruchteile einer Bogensekunde bedeutet. Bei Normalvergrößerung ($\phi = 5$ mm) hat (nach Gl. 5 Anm. [1]) der Zapfendurchmesser ($\varrho = 3\mu$) einen

1) Die häufig benutzten Umrechnungsformeln sind folgende: Wenn man (Gl. 2 S. 7) f die Luftbrennweite des Auges $= 17{,}0$ mm und λ die Luftwellenlänge des wirksamen Lichtes etwa $= 589\,\mu\mu$ setzt, so hat man:

$$\varrho = 3{,}2\,\mu \frac{u}{\phi}\ \text{mm}, \quad (5)$$

d. h. z. B.: bei einer Pupillenöffnung von $\phi = 1$ mm bedeckt eine optische Einheit $u = 1$ auf der Netzhaut eine Strecke von $\varrho = 3{,}2\,\mu$, also ungefähr den Durchmesser eines Zapfenelements der Netzhaut, der durchschnittlich $3{,}0\,\mu$ beträgt.

Selbstverständlich kann man auch die Abmessung u in optischen Einheiten in Beziehung setzen zu der ihr entsprechenden, scheinbaren Größe α'' des durch ein Fernrohr gesehenen unendlich fernen Bildes, denn es ist ja:

$$\alpha'' = \frac{\varrho}{f} \cdot 206265''$$

und daher nach der Ausgangsformel (2 S. 7)

$$\alpha'' = 38''{,}7\,\frac{u}{\phi}\ \text{mm}. \quad (6)$$

Bei 1 mm Pupillenöffnung entspricht einer optischen Einheit also ein Sehwinkel von rund 39 Bogensekunden.

Wert von etwa 5 o. E., d. h. der interessierende Verlauf von Δi spielt sich auf nur zwei nebeneinander liegenden Zäpfchen der Netzhaut ab und von einer differentiellen Beobachtungsmöglichkeit kann nicht mehr die Rede sein. Erst wenn der Wert des Zapfendurchmessers in o. E. (Gl. 5a Anm.) durch starke Okularvergrößerung oder durch Abblendung des Objektivs, bzw. des Okulars auf ca. $^1/_2$ o. E. herabgedrückt ist, d. h. bei ca. 10facher Normalvergrößerung (oder einer Diopteröffnung von ca. $^1/_2$ mm) wird man auf ziemlich reine Beobachtung und Messung der erwarteten Erscheinungen rechnen dürfen. Man kann etwa sagen, daß das Auge bei großer Pupillenöffnung, bzw. einer die Normalvergrößerung des Instrumentes nur wenig überschreitenden Okularvergrößerung, den Kontrasterscheinungen an Beugungsbildern gegenüber noch zu wenig punktförmig empfindet, d. h. mehr nach Zapfenquerschnitten als nach Differentialquotienten der Intensitätsverteilung beobachtet, daß also zuverlässige Nachprüfungen der erwarteten Erscheinungen und damit überhaupt zuverlässige Messungen nur bei ca. 10facher Normalvergrößerung erwartet werden können. (Genauere Festlegung der „hinreichenden Vergrößerung" S. 21).

2. Numerischer Verlauf.

a) Das Ausgangsmaterial.

An Material für numerische Beispiele sind bisher folgende Beugungsbilder von selbstleuchtenden Objekten für kreisförmige Öffnung berechnet worden:

1. Das Bild des Lichtpunktes: berechnet von Schwerdt (XVII, Tab. 3; z. T. abgedruckt in VIII, 26).

2. Kreisscheiben:

vom Radius $u = \infty$ berechnet von Struve (III, 35)
„ „ $u = 50$ „ „ „ (III, 54)
„ „ $u = 10$ „ „ „ (III, 55)
„ „ $u = 1$ „ „ „ Kühl (VIII, 48)

NB! Auch die Intensitätsverteilungen der ersten drei Kreisscheiben sind z. T. abgedruckt in VIII, 48.

2a. Durch Kombination von Halbebene und kleiner Kreisscheibe zwei nahe zusammenstoßende sichelförmige Flächen (Venusdurchgang in der Nähe des inneren Kontakts) berechnet von

Struve (III, 74)
Nagaoka (XVIII, Tafel 17). (Zeichnerische Darstellung durch Linien gleicher Intensität.)

3. Die für die Berechnung von Beugungsbildern unbedingt nötige Tabelle der Funktion $2(1-J_0^2-J_1^2)$ berechnet von

Struve (III, 40). (Große Intervalle von $u = 0$ bis $u = 2000$.)
Strehl (XVI). (Auf 3 Dezimalen, Intervall 0,05 für $u = 0$ bis $u = \infty$.)
Nagaoka (XVIII, 348). (5 Dezimalen, Intervall 0,01 für $u = 0{,}00$ bis $u = 3{,}83$.)
(XVIII, 330). (5 Dezimalen, Intervall 1,0 bis 10 für $u = 0$ bis $u = 50$.)

b) Der Lichtpunkt.

Die objektive Intensitätsverteilung im Beugungsbild des Lichtpunktes aus der erwähnten Arbeit von Schwerdt (XVII Tabelle III), hat unter Benutzung auch der dritten Differenzen die folgende Darstellung der Kontrastfunktion ergeben.

Tabelle I.

Intensität und Kontrastwerte am Beugungsbild des Lichtpunktes.

u	$\mathcal{J}(u)$	$c \cdot \Delta\mathcal{J}$	u	$\mathcal{J}(u)$	$c \cdot \Delta\mathcal{J}$
0	+ 1,0000	— 705	3,9270	+ 0,0004	+ 41
0,2618	0,9825	— 680	4,1888	41	+ 13
5236	9330	— 619	4506	95	+ 1
7854	8550	— 530	7124	143	— 5
1,0472	7550	— 406	9742	170	— 9
3090	0407	— 289	5,2360	173	— 11
5708	5208	— 158	4978	154	— 11
8326	4031	— 46	7596	121	— 7
2,0944	2950	+ 41	6,0214	82	+ 3
3562	2018	+ 107	2832	46	+ 12
6180	1266	+ 139	5450	19	+ 13
8798	706	+ 151	8068	4	+ 9
3,1416	329	+ 139	7,0686	0	0
4034	109	+ 111	3304	6	
6652	14	+ 74	5922	17	
(8327)	(0,0000)	+ (53)			

Für die Verbindung des Auges mit dem Fernrohr wird man gern die Eintrittspupille des Auges durch die Okularvergrößerung Γ ersetzen. Wenn man als Normalvergrößerung Γ_0 eines Fernrohrs mit der $EP = 2R$ diejenige Okularvergrößerung bezeichnet, welche seine Austrittspupille auf 5 mm reduziert, also setzt $\Gamma_0 = \frac{2R}{5}$ mm, so wird $\rho = \frac{5\Gamma_0}{\Gamma}$ und Gl. 5 geht über in

$$\varrho = 0{,}64\,\mu \cdot u \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma_0}, \qquad (5a)$$

d. h. die einer optischen Einheit entsprechende Abmessung auf der Netzhaut wächst proportional der Okularvergrößerung.

Führt man endlich noch statt der scheinbaren Bildgröße α'' die ihr entsprechende Mikrometerablesung β'' ein durch $\beta'' = \frac{\alpha''}{\Gamma}$, so geht Formel (6) über in:

$$\beta'' = 7''{,}7\,\frac{u}{\Gamma_0}, \qquad (6a)$$

d. h. die einer optischen Einheit entsprechende Mikrometerablesung ist der Fernrohröffnung umgekehrt proportional.

Eliminiert man aus (5a) und (6a) u, so hat man direkt die einer Netzhautabmessung entsprechende Mikrometerablesung

$$\beta'' = \frac{7''{,}7}{\Gamma} \cdot \frac{\varrho}{0{,}64}, \qquad (7)$$

also für einen Zapfendurchmesser ($\varrho = 3\mu$)

$$\beta_z'' = \frac{36''{,}1}{\Gamma}.$$

Es zeigen sich demnach
Nullstellen bei: $u = 1{,}96,\ 4{,}51,\ 5{,}93,\ 7{,}02.$
Extremstellen bei: $u = 0,\ 2{,}89,\ 5{,}35,\ 6{,}48.$

Da die fettgedruckten Werte Maximalwerte der Kontrastfunktion darstellen, so haben wir hier die tiefste Dunkelheit in der Furche zwischen der Beugungsscheibe und ihren hellen Ringen zu erwarten. Das widerspricht zwar zum Teil der landläufigen Anschauung, die die tiefste Dunkelheit an der Stelle geringster Intensität sucht, aber es deckt sich durchaus mit der von Hering (I) immer wieder durch Beispiele belegten Erfahrungstatsache, daß durch Kontrast eine tiefere Dunkelheit empfunden werden kann als der einfachen Abwesenheit von Licht entspricht.

c) Die Halbebene und der gerade Streifen.

Entnimmt man der ausführlichen Tabelle Struves (III, 35) über die Intensitätsverteilung am Rande des Beugungsbildes der geradlinig begrenzten Halbebene die Funktionswerte in Intervallen von 0,4 o. E. des Arguments und bildet unter Beschränkung auf die zweiten Differenzen die Werte der Kontrastfunktion $c\,\Delta i = c\,\frac{d^2 i}{dx^2}$, so erhält man nach leichter graphischer Ausgleichung die folgende Tabelle. Darin gibt das Argument $+e$ die Entfernung vom geometrisch-optischen Bildrand nach außen an. Die Intensität und die Kontrastfunktion für das Argument $(-e)$ sind natürlich:

$$i(-e) = 1 - i(+e)$$
$$\Delta i(-e) = -\Delta i(+e).$$

Man erkennt die Nullstellen bei $e = 0,\ 3{,}6,\ 5{,}0,\ 6{,}6$ usw.; die Stellen der Extreme bei $e = 1{,}4,\ 4{,}3,\ 5{,}8$ usw. Die fettgedruckten Abszissenwerte deuten die Lage der Maxima der Kontrastfunktion (Dunkelkeit) an.

Aus der Kontrastfunktion der Halbebene leitet man leicht die Konstrastfunktionen verschieden breiter unendlich langer Lichtstreifen ab. Da die Intensitätsfunktion des Beugungsbildes des unendlich langen, von parallelen Geraden begrenzten Lichtstreifens in einer auf seiner Kante senkrechten Linie sich einfach als die Differenz der Intensitätsfunktionen zweier um die Streifenbreite senkrecht zu ihrer Kante gegeneinander verschobener Halbebenen ergibt, so gilt dasselbe für die Kontrastfunktion. Man gelangt daher sofort zu unmittelbarer Anschauung der Lagenveränderungen der Abszissen für die Null- und Extremwerte der Kontrastfunktion von Lichtlinien, wenn man zwei graphische Darstellungen der Konstrastfunktion und ihres ersten Differentialquotienten nach Tabelle II gemäß der zu untersuchenden Lichtstreifenbreite übereinander schiebt.

Tabelle II.

Intensität und Kontrastwerte am Rande der leuchtenden Halbebene.

$+e$	$J(+e)$	$c \cdot \Delta J$	$c \cdot \frac{d\,\Delta J}{de}$	$+e$	$J(+e)$	$c \cdot \Delta J$
0,0	0,5000	0	+ 67	8,4	0.0241	+ 3
4	3934	+ 84	+ 58	8	227	+ 4
8	2955	+ 146	+ 39	9.2	217	+ 3
1.2	2132	+ 184	+ 14	6	209	+ 1
6	1504	+ 186	— 14	10,0	203	— 1
2,0	1073	+ 160	— 33	4	197	— 2
4	0810	+ 114	— 39	8	190	— 1
8	0670	+ 66	— 32	11,2	182	0
3.2	0602	+ 28	— 23	6	174	+ 2
6	0564	0	— 14	12,0	167	+ 1
4,0	0528	— 12	— 5	4	162	— 2
4	0484	— 13	+ 4	8	158	0
8	0434	— 7	+ 11	13,2	154	+ 1
5,2	0389	+ 5	+ 11	6	150	— 1
6	0353	+ 10	+ 3	14,0	145	0
6.0	0328	+ 8	— 7	4	141	+ 1
4	0311	+ 4		8	137	— 0,5
8	0299	— 1		15,2	133	+ 0,5
7,2	0287	— 3				
6	0272	— 2				
8.0	0256	— 1				

Tabelle III.

Wahre Breite der Lichtlinie	Mittelmaximums	Lage des I. (inneren) Minimums	I. Nullortes	I. Minimums	II. Nullortes	II. Minimums
o. E.	o. E.	o. E	o. E.	o. E.	o. E.	o. E.
0		0	+ 1,40	+ 2,40	+ 4,30	+ 5,0
0,1		— 0,05	+ 1,37	+ 2,33	+ 4,10	+ 4,9
0,2		— 0,1	+ 1,30	+ 2,27	+ 4,10	+ 4,8
0,4		— 0,2	+ 1,20	+ 2,15	+ 4,07	+ 4,75
0,8		— 0,4	+ 0,95	+ 2,03	+ 3,90	+ 4,6
1,0		— 0,5	+ 0,93	+ 1,93	+ 3,83	+ 4,5
2,0		— 1,0	+ 0,50	+ 1,63	+ 3,47	+ 3,9
3,0		— 1,5	+ 0,13	+ 1,37	+ 3,07	+ 4,0
4,0		— 2,0	— 0,05	+ 1,27	+ 3,6	+ 4,1
4,7		— 2,35	— 0,05	+ 1,4	+ 3,6	+ 4,2
5,0	— 2,5	— 1,8	0	+ 1,4	+ 3,6	+ 4,2
6,0	— 3,0	— 1,3	0	+ 1,4	+ 3,6	+ 4,2
∞	— ∞	— 1,4	0	+ 1,4	+ 3,6	+ 4,2

Ermittelt man auf diesem Wege die Lage der Null- und Extremwerte der Kontrastfunktion verschieden breiter Lichtstreifen, so erhält man die in der Tabelle III zusammengestellten Resultate.

Man erkennt bei geringer Streifenbreite[1]) (bis zur Breite 4,7 o. E.) ein Minimum über der Mittellinie des geometrisch-optischen Bildes. Mit weiter wachsender Breite gliedert sich das innere Minimum in zwei (durch ein anfänglich sehr flaches, später mit kleinen Oszillationen auf Null anwachsendes sekundäres Maximum) getrennte Minima, welche bei größerer Breite des Lichtstreifens in die konstante Entfernung 1,4 o. E. innerhalb der beiden geometrisch-optischen Bildränder rücken. Die äußeren Null- und Extremstellen nähern sich bei wachsender Linienbreite von maximalen Entfernungen außerhalb des geometrisch-optischen Bildrandes, die sie bei der Breite Null des Lichtstreifens innehaben, unter kleinen Schwankungen dem Bildrande bis auf die konstanten Entfernungen, die sie bei der Halbebene haben. Die Konstanz dieser Entfernungen wird praktisch ebenfalls bei der Linienbreite 4,7 erreicht. Von dieser Breite aufwärts erst kann eine mit den Tatsachen übereinstimmende, wenigstens differentielle Größenmessung an den optischen Bildern möglich sein, während vorher zwischen der Dimension des optischen Bildes und des Objekts ein komplizierterer Zusammenhang besteht. Man kann daher die allgemeine Bemerkung machen, daß das Auge eine Breitenzunahme an Lichtstreifen erst dann objektiv richtig sieht, wenn die geometrisch-optischen Netzhautbilder die Breite 4,7 überschritten haben, womit für die optische Praxis zugleich eine Unterscheidung von Lichtlinien (über deren objektive Breite der Gesichtseindruck kein rechtes Urteil erlaubt) und Lichtstreifen (deren geometrisch optische Bildbreite 4,7 o. E. überschreitet und die daher schon als zweidimensionale Gebilde objektiv richtig meßbar sind) gegeben ist.

d) Die Kreisscheibe.

Bildet man die Konstrastwerte für die von Struve (III) berechneten Kreisscheiben der Radien 50 und 10 o. E. und für die von Kühl (VIII) berechnete Scheibe vom Radius 1 o. E. und überträgt sie in den Maßstab der bisherigen, so erhält man die folgenden Tabellen.

[1]) Strehl hat eine derartige Tabelle unter Annahme spezieller Kohärenzen auch für beleuchtete Streifen gerechnet (Zentralztg. f. Optik u. Mechanik 1925, S. 47). Wir sehen nach den Untersuchungen von Berek umso lieber davon ab, als sich später obige Tabelle für beide Fälle gut bewährt.

Tabelle IV.

Intensität und Kontrastwerte am Rande der Scheibe vom Radius $u = 50$ o. E.

u	$J(u)$	$c \cdot \Delta J$	u	$J(u)$	$c \cdot \Delta J$
46,0	0,9360	+ 17	51,2	0,2010	+ 183
4	9325	+ 1	6	1391	+ 187
8	9292	— 35	52,0	971	+ 159
47,2	9227	— 78	4	715	+ 114
6	9086	— 128	8	577	+ 71
48,0	8822	— 172	53,2	509	+ 32
4	8379	— 195	6	467	+ 10
8	7742	— 189	54,0	430	+ 1
49,2	6909	— 152	4	398	— 4
6	5930	— 88	8	354	— 1
50,0	4859	— 3	55,2	312	+ 3
4	3799	+ 78	6	275	+ 3
8	2828	+ 142			

Tabelle V.

Kontrastwerte für Kreisscheiben.

Scheibenradius $u = 100$ o. E.		Scheibenradius $u = 1$ o. E.	
e[1]) o. E.	$c \cdot \Delta J$	e[1]) o. E.	$c \cdot \Delta J$
— 6,0	— 8	— 1,0	— 305
— 5,6	— 5	— 0,6	— 291
2	— 4	— 0,2	— 250
4,8	— 6	+ 0,2	— 168
4	— 9	+ 0,6	— 81
4,0	— 14	+ 1,0	— 17
3,6	— 22	+ 1,4	+ 30
2	— 35	+ 1,8	+ 61
2,8	— 72	+ 2,2	+ 59
4	— 126	+ 2,6	+ 39
2,0	— 179	+ 3,0	+ 23
1,6	— 213	+ 3,4	+ 7
2	— 225	+ 3,8	— 5
0,8	— 195		
— 0,4	— 104		
0,0	0		
+ 0,4	+ 74		
8	+ 135		
1,2	+ 147		
6	+ 148		
2,0	+ 140		
4	+ 111		
8	+ 70		
3,2	+ 29		
6	+ 2		
+ 4,0	— 10		

[1]) $+e$ bedeutet die Entfernung vom geom.-opt. Bildrand nach außen.

Die graphische Darstellung ergibt für die Scheibe vom

Radius $u = 50$ Nullstellen bei $e = -3{,}60, +3{,}6$

Extremstellen „ $e = -1{,}4, +1{,}4$

$u = 10$ o. E.:

Nullstellen „ $e = 0, +3{,}6$

Extremstellen „ $e = -1{,}2, +1{,}4$

$u = 1$ o. E.:

Nullstellen „ $e = +1{,}12, +3{,}7$

Extremstellen „ $e = 1{,}0, +1{,}95$.

Die Kontrastkurve für die Scheibe $u = 1$ o. E. zeigt analog den sehr schmalen geraden Streifen

noch durchaus den Charakter der Kontrastkurve des Punktbildes, während die Kontrastkurve der Scheibe $u = 10$ o. E. schon völlige Ähnlichkeit mit der Kurvengestalt an der Halbebene aufweist.

Aus einer graphischen Darstellung der ausgezeichneten Kontraststellen gegen den Rand der verschieden großen Scheiben, folgt unter Berücksichtigung der Verhältnisse bei Lichtstreifen, daß auch an Kreisscheiben in der Nähe des Durchmessers 4,7 o. E. (wie bei den Lichtstreifen dieser Breite) jene charakteristische Änderung der Kontrastfunktion vor sich geht, welche uns dort zur Unterscheidung von optischen Linien und Streifen, hier zur Unterscheidung von optischen Punkten und Scheiben veranlaßt[1]).

1) Früher war (VIII, 50) der wohl etwas zu kleine Durchmesser 3 o. E. als Grenze angesetzt worden.

e) Der Keil.

Eine empfindliche Lücke im vorhandenen Material besteht für Beugungsbilder geradlinig begrenzter Objekte, die astronomisch weniger interessieren und infolgedessen rechnerisch — abgesehen von der Halbebene (Kreis vom Radius ∞) und der unendlich schmalen, unendlich langen Geraden (XIX) — überhaupt nicht behandelt sind.

Für physiologisch optische Prüfungen, so auch für die Nachprüfung der Theorie der Bildbegrenzung sind aber oft gerade solche Objekte besonders geeignet. Das Bild eines ganz beliebigen geradlinig begrenzten Objekts kann verhältnismäßig einfach aus den Beugungsbildern von Dreiecken zusammengesetzt werden. Ein Dreiecksbild aber läßt sich wiederum aus Sektoren von bestimmter Öffnung und unendlich großem

Tabelle VI.

Intensität außerhalb der Spitze eines Lichtkeils von 1^0 Öffnung.
(Einheiten der fünften Dezimale.)

x \ y	0	+0,4	+0,8	+1,2	+1,6	+2,0	+2,4	+2,8	+3,2	+3,6	+4,0
0	278	267	237	195	147	106,6	72,5	54,7	47,3	45,9	44,8
+0,4	195	187	165	137,5	103,5	76,6	60,5	48,0	43,4	42,2	40,8
+0,8	133,2	130,0	114,2	93,8	78,3	61,9	48,8	42,6	40,2	38,8	37,6
+1,2	91,9	88,9	79,6	67,4	56,3	48,1	41,9	38,2	36,5	35,9	35,0
+1,6	60,7	59,1	54,5	48,4	43,4	39,8	36,6	34,6	33,8	32,9	31,9
+2,0	45,4	44,5	42,8	39,5	36,8	35,6	33,5	32,2	31,4	30,1	29,5
+2,4	35,8	35,3	34,7	33,9	32,6	31,5	30,3	29,2	28,5	27,3	26,3
+2,8	31,2	31,0	30,7	30,0	29,6	28,8	28,1	27,2	26,3	25,2	24,0
+3,2	28,0	28,0	27,9	27,6	27,1	26,2	25,3	24,5	23,8	23,0	22,2
+3,6	25,8	25,7	25,5	25,1	24,7	24,3	23,5	22,7	21,8	20,9	20,0
+4,0	23,9	23,8	23,3	23,1	22,6	22,2	21,8	21,0	20,0	19,3	18,4

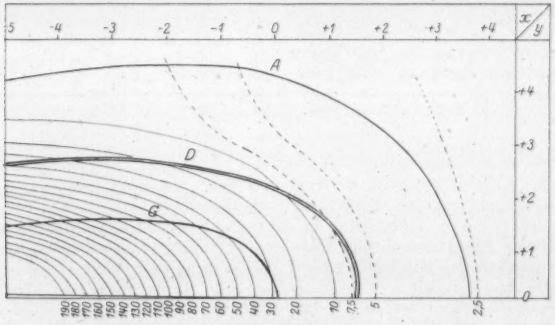

Fig. 6.
Isophoten und Kontrastkurven nahe der Spitze des Ein-Grad-Sektors.

G: Kurve $\Delta i = 0$ zwischen Hell- und Dunkelkontrast,
D: „ $\Delta i =$ Max. (größter Dunkelkontrast),
A: „ $\Delta i = 0$ am Außenrand des Dunkelkontrastes.

Radius (keilförmige Flächen) aufbauen. Das Bild des Sektors von beliebiger Öffnung endlich ist für die Zwecke der mechanischen Quadratur wieder aus Sektoren konstanter kleiner Öffnung zusammensetzbar. So wird man für die Bildberechnung von gradlinig begrenzten Figuren mit der Kenntnis des Beugungsbildes eines unendlich erstreckten Sektors von 1 Grad Öffnung schon ziemlich weit kommen, wenn es auch erwünscht bleibt, Sektoren größerer Öffnung direkt berechnet zu haben, um geringere Fehler in dem zusammengesetzten Bild zu erhalten. Für die Wahl des Ein-Grad-Sektors kommt hier außerdem noch dazu, daß die Beugungswirkungen und damit die Abweichungen der Bildgrenze umso stärker sind, je weniger ausgedehnt der betrachtete Gegenstand ist und schließlich noch die Überlegung, daß sehr wenig geöffnete Lichtkeile bei Planetenausmessungen mit Doppelbildmikrometern eine Rolle spielen. Struve (III, 88) hat zwar auch diese Aufgabe in den Kreis seiner Betrachtungen gezogen und für größere Entfernung der betrachteten Punkte von der Spitze Näherungsformeln für die Intensität aufgestellt, auf deren Benutzung hier verzichtet werden muß, weil gerade die Lichtverteilung in nächster Nähe der Spitze interessiert. Immerhin sind seine allgemeinen Folgerungen über den Lauf der Isophoten als Probe auf die Richtigkeit der folgenden numerischen Ergebnisse auch hier von Nutzen gewesen.

Macht man im Ein-Grad-Sektor die Winkelhalbierende zur x-Achse und zählt die Abszissen negativ von der Spitze ins Innere des Lichtkeils, so ergibt die mechanische Quadratur folgende Übersicht über die Intensitätsverteilung.

Nach Tabelle VI und VII sind zur Veranschaulichung der Lichtwirkung die Isophoten der Übersichtsskizze Fig. 6 gezeichnet.

Wie von vornherein zu erwarten, stehen die Isophoten nahe der Spitze fast senkrecht auf den Grenzlinien des geometrisch-optischen Bildes und werden ihnen erst in recht erheblicher Entfernung genähert parallel, in Übereinstimmung mit den allgemeinen Aussagen, welche Struve a. a. O. aus seinen Formeln deduziert. Besondere Hervorhebung verdient vielleicht, daß — wie die eigenartigen Ausbuchtungen der Isophoten 7,5 und 5 zeigen — die Genauigkeit der mechanischen Quadratur hinreichte, um noch die Wirkung des ersten Beugungsringes in Erscheinung treten zu lassen.

Um den Verlauf der Kontrastfunktion in der Umgebung der Spitze des hellen unendlich langen Sektors von 1 Grad Öffnung zu erhalten, sind aus den Intensitätstabellen VI und VII mit Hilfe der ersten und zweiten Differenzen nach den beiden Koordinaten x und y die Ausdrücke

Tabelle VII. Intensität im Innern und seitlich des Lichtkeils von 1° Öffnung.

x \ y	0	+ 0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6	4,0	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0
						(Einheiten der 5. Dezimale)															
0	278	467	237	195	147	106	73	55	48	46	45										
— 0,4	384	368	326	267	200	157	94	66	53	49	48	49									
— 0,8	511	490	433	352	262	180	117	76	57	50	53	54									
— 1,2	659	631	556	448	332	227	142	89	62	53	57	59									
— 1,6	817	781	689	556	407	275	170	101	66	55	62	65									
— 2,0	990	946	834	671	489	326	199	114	73	59	67	71									
— 2,4	1170	1116	981	789	574	380	228	127	78	62	72	75									
— 2,8	1354	1292	1135	909	659	433	258	139	85	65	78	82									
— 3,2	1540	1468	1288	1028	743	487	286	154	88	69	83	88									
— 3,6	1727	1644	1441	1149	827	540	315	167	94	72	89	95									
— 4,0	1914	1821	1595	1269	912	592	344	179	99	76	93	101									
— 5,0	2354	2254	1984	1592	1147	741	423	209	105	70	92	100									
— 7,5	3350	3200	2820	2260	1630	1050	600	300	150	100	130	140									
						(Einheiten der 4. Dezimale)															
— 10	453	434	382	306	221	143	81	40	20	13	18	20									
— 20	942	902	792	635	460	298	160	85	42	29	36	41									
— 40	1868	1790	1576	1268	924	603	349	178	91	63	71	83									
— 100	4416	4259	3783	3109	2346	1615	1010	579	326	213	176	188	187	170							
— 112,25	4944	4779	4274	3538	2700	1891	1212	718	417	269	220	212	208	187	154	117	89	75	71		
— 168,40	6716	6516	5951	5109	4115	3106	2104	1461	933	594	404	315	276	254	228	219	162	136	116		
— 200	7348	7160	6617	5790	4875	3762	2782	1943	1293	835	543	388	315	281	267	241		207	172	144	125
— 224,50	7852	7686	7193	6443	5502	4472	3450	2521	1743	1151	745	499	371	315	292	272	243				

Tabelle VIII.

Kontrastwerte an der Keilspitze.

y \ x	+4,0	+3,6	+3,2	+2,8	+2,4	+2,0	+1,6	+1,2	+0,8	+0,4	0	−0,4	−0,8	−1,2	−1,6	−2,0	−2,4	−2,8	−3,2	−3,6	−4,0
0	−0,2	0,1	0,9	2,1	4,2	6,6	8,8	9,5	9,0	5,5	0	−7,5	−20,5	−36,5	−52,5	−70,0	−90,0	−107,5	−125,5	−142,5	−160,0
+0,4	−0,3	0,0	0,7	2,0	4,0	6,5	8,8	10,4	10,3	7,2	2,5	−4,5	−17,0	−32,0	−46,0	−61,0	−76,5	−93,5	−109,0	−123,5	−136,5
0,8	−0,4	−0,2	0,5	1,5	3,3	5,7	8,7	11,0	11,8	9,5	5,5	0,5	−8,5	−19,0	−30,0	−41,5	−52,5	−63,5	−73,0	−81,0	−87,5
1,2	−0,5	−0,3	0,1	1,0	2,3	5,0	8,5	11,9	12,2	17,5	9,5	5,5	3,0	−1,2	−6,5	−13,5	−18,5	−22,6	−26,0	−29,5	−31,5
1,6	−0,4	−0,4	−0,1	0,5	1,7	3,8	7,1	11,0	14,0	15,5	15,2	13,5	13,0	13,5	14,5	16,0	17,0	19,0	21,5	25,0	27,5
2,0	−0,3	−0,4	−0,3	0,2	1,2	2,7	5,0	8,0	12,0	15,2	17,5	18,9	21,5	25,0	29,5	34,0	40,0	45,5	52,5	60,0	66,5
2,4	−0,0	−0,3	−0,3	−0,2	0,3	1,2	2,5	4,8	7,0	12,5	17,0	20,0	23,5	28,0	34,0	41,5	49,0	56,5	68,5	72,5	80,0
2,8	−0,0	−0,2	−0,3	−0,4	0,0	0,5	1,5	3,0	5,5	9,2	13,0	16,0	20,0	26,0	31,5	37,5	45,0	52,0	60,0	68,5	76,5
3,2			−0,2	−0,3	−0,4	−0,3	0,0	1,3	2,3	4,0	6,2	9,5	14,0	18,5	23,5	29,0	34,0	40,0	46,5	53,5	60,0
3,6				−0,2	−0,3	−0,4	−0,5	−0,2	0,3	0,9	1,6	3,6	7,5	11,0	14,0	17,0	20,0	23,0	26,0	28,5	31,5
4,0					−0,2	−0,3	−0,4	−0,9	−0,7	−0,4	0,2	1,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,0	4,5	4,0	4,0	3,5
4,4						−0,0	−0,1	−0,2	−0,3	−0,4	−0,5	−1,0	−1,5	−1,5	−2,0	−2,5	−3,5	−4,0	−5,0	−6,0	−7,0

$c\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$ und $c\frac{\partial^2 i}{\partial y^2}$ gebildet, additiv zu $c \cdot \Delta i$ vereinigt und graphisch ausgeglichen. Die Ergebnisse sind in Tabelle VIII und IX vereinigt.

Die Projektionen der Nullinien und der Kammlinie der Kontrastfläche auf die Bildfläche sind in Fig. 6 eingetragen, so daß es ein leichtes ist, sich die Umwallung des Bildes mit dem an der Spitze ziemlich niedrig werdenden „Kontrastgebirge" plastisch vorzustellen.

Die Kontrastlinien verlaufen somit in der Nähe der Sektorspitze durchaus nicht parallel zu den Isophoten, sondern kreuzen sie unter endlichen Winkeln. In größerer Entfernung von der Spitze werden sie allerdings den Isophoten wieder parallel. Die Entfernung der Hauptkontraststellen vom geometrisch-optischen Bildrande ist in größerer Entfernung (von mehr als 4 o. E.) von der Spitze dieselbe wie bei einem Lichtstreifen von der Breite des Sektorquerschnitts an der betrachteten Stelle. Je mehr man sich der Spitze nähert, um so mehr weicht ihre Lage von dieser Regel ab und zwar in dem Sinne, daß sich die Kurve der inneren Nullstelle allmählich der Spitze nähert, um diese dann zu schneiden. In der Nähe der Spitze zeigt die Kontrastfläche ein einfaches rinnenförmiges Tal, dessen Sohle senkrecht unter der Mittellinie des Sektors verläuft. Erst in einer Entfernung $x = +265$ o. E. von der Spitze, wo der Sektor einen Querschnitt von 4,7 o. E. überschreitet, ändert sich der Querschnitt jenes Tales in der Art, wie wir es an der Kontrastkurve entsprechend breiter Lichtstreifen kennen, d. h. erst von hier ab gabelt sich die Linie des inneren Hellkontrastes, die bisher der Mittellinie des Sektors folgte, in zwei Zweige, welche sich allmählich dem geometrischen Bildrand parallel richten und ihn in einer Entfernung von 1,4 o. E. nach innen gerechnet begleiten.

Von besonderer Wichtigkeit ist für spätere Anwendungen, daß die Talsohle an der Stelle $x = -152$ o. E., an welcher der Lichtkeil eine Breite von 3,0 o. E. hat, ihr Minimum erreicht, m. a. W., daß hier der über der Keilmitte liegende Hellkontraststreifen ein Helligkeitsmaximum zeigt.

Wäre nach bisheriger Auffassung irgendeine isophote Bildgrenze, so müßte das Beugungsbild einer schmalen Lichtspitze nach Fig. 6 als abgestumpfte Spitze, aber immerhin noch als Spitze erscheinen, denn die Zweige der hyperbelförmigen Isophoten konvergieren stets, wie sehr man sich auch der Spitze nähern mag. Nach den Kontrastlinien aber muß das Beugungsbild ein fast keulenförmig verdicktes Ende zeigen, denn es gibt nahe der Spitze Strecken, innerhalb

Tabelle IX.

Kontrastwerte in größerer Entfernung von der Keilspitze.

(Einheit verzehnfacht)

x \ y	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6	4,0	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0
5	− 185	− 166	− 117	− 47	+ 28	+ 80	+ 102	+ 98	+ 76	+ 42	+ 7	− 7									
7,5	− 265	− 235	− 165	− 67	+ 40	+ 115	+ 145	+ 137	+ 107	+ 90	+ 47	− 10									
10,0	− 355	− 320	− 222	− 87	+ 52	+ 150	+ 197	+ 190	+ 147	+ 85	+ 15	− 15									
20,0	− 750	− 670	− 430	− 200	+ 130	+ 340	+ 410	+ 400	+ 310	+ 170	+ 40	− 10									
40,0	− 146	− 131	− 90	− 36	+ 19	+ 60	+ 80	+ 78	+ 60	+ 34	+ 11	+ 2	− 12	− 8							
100	− 316	− 286	− 202	− 83	+ 26	+ 115	+ 165	+ 168	+ 131	+ 86	+ 41	+ 2	− 11	− 11	− 3	+ 7	+ 12	+ 9	+ 5		
112,25	− 335	− 311	− 226	− 102	+ 23	+ 121	+ 172	+ 179	+ 150	+ 98	+ 47	+ 8	− 11	+ 2	− 10	+ 7	+ 10	+ 11	+ 3		
168,40	− 393	− 352	− 268	− 149	+ 22	+ 90	+ 166	+ 195	+ 183	+ 147	+ 102	+ 55	+ 21	+ 17	− 1	+ 6	− 8	− 3	+ 5	+ 7	+ 5
200	− 396	− 341	− 270	− 168	− 53	+ 54	+ 133	+ 177	+ 186	+ 166	+ 129	+ 85	+ 46	+ 35	+ 15	+ 3					
334,5	− 327	− 311	− 261	− 182	− 89	+ 5	+ 80	+ 140	+ 178	+ 180	+ 156	+ 117	+ 71								

deren die Zweige der parabelartigen Kontrastlinien einander parallel laufen, ja, in denen sie bei Annäherung an die Spitze sogar ein wenig divergieren. Ein Beispiel dafür bietet die beigegebene photographische Aufnahme (Fig. 7) eines Sonnenflecks, die mir durch Vermittlung des Herrn Dr. med. Strebel, München, von Herrn H. Schmidt, Mittweida, freundlichst zur Verfügung gestellt wurde. Sie ist von Herrn Schmidt

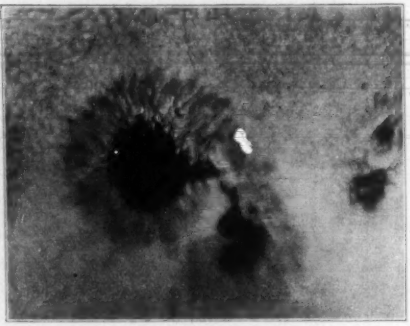

Fig. 7.
Sonnenfleck mit „keulenförmigen" Lichtzungen.

am 15. Juni 1917 mit einem seiner 50 cm Spiegel von 30 m Brennweite hergestellt. Die in den Kern des Flecks hineingesogenen „Flammenzungen", welche physikalischer Anschauung zufolge in feine sehr intensiv leuchtende Spitzen auslaufen müssen, zeigen gerade in dem besonders scharfen Teil der Aufnahme die Keulenform, während im übrigen Teil der Aufnahme örtliche Schlieren die Intensitätsverteilung verwaschen haben.

f) Zusammenfassung.

Aus der Berechnung der Funktion Δi für die beugungstheoretisch bekannten Intensitätsverteilungen von Fernrohrbildern gleichförmig leuchtender Objekte, stellt sich heraus, daß die Kontrastfunktion in der Nähe des idealen Bildrandes stets die Form einer Wellenfläche hat mit einem Wellental innerhalb und einem Wellenberg außerhalb der leuchtenden Bildfläche. In Rücksicht auf die Wirkung des Vorzeichens von Δi folgt also, daß eben innerhalb des idealen Bildrandes des leuchtenden Bildes ein heller Kontraststreifen, eben außerhalb ein dunkler Kontraststreifen gesehen werden müßte. Die Nachprüfung mit hinreichender Okularvergrößerung bestätigt diese Folgerung aufs deutlichste (XXXVII).

Identifiziert man genügend genähert die Kontrastextreme mit den Extremstellen von Δi und beachtet, daß zwar an den Nullstellen von Δi nach Gl. (1a) die Intensität i maßgebend ist, daß aber wegen der Größe von $\frac{k}{2}$ auch die Nullstellen von ε in ihrer unmittelbaren Nähe liegen, so zeigt der Vergleich der hauptsächlich für die Fernrohrmessung in Betracht kommenden

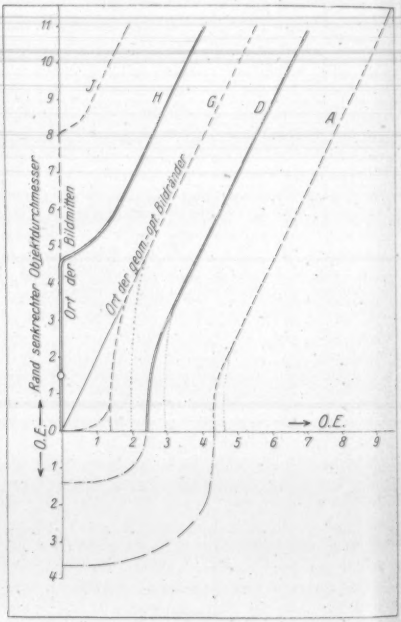

Fig. 8.
Übersicht über die Lage der ausgezeichneten Kontraststellen als Funktion des randsenkrechten Objektdurchmessers.
J, G, A Orte für $\Delta i = 0$ an der inneren Grenze des Hellkontrastes, zwischen beiden Kontrasten und an der Außengrenze des Dunkelkontrastes.
H, D Orte maximalen Hell- und Dunkelkontrastes.

Bildformen eine so weitgehende Übereinstimmung in der Lage der ausgezeichneten Kontraststellen zum idealen Bildrand, daß man für die Beobachtungspraxis unbedenklich folgende einheitliche Darstellung wählen kann:

Hat an hellen Bildscheiben, Bildstreifen oder Bildecken der von den fraglichen idealen Randstellen gemessene randsenkrechte Bilddurchmesser in optischen Einheiten den Wert u, so haben längs ihm die ausgezeichneten Kontrast-

Tabelle X.

Lagen der ausgezeichneten Kontraststellen zum Bildrand von hellen Bildern.

Wahre Bildbreite o. E.	Innere Grenze des hellen Streifens $\Delta i = 0$	Maximum des Hellkontrastes $\Delta i =$ Min.	Grenze zw. beiden Kontraststreifen $\Delta i = 0$		Maximum des Dunkelkontrastes $\Delta i =$ Max.		Äußere Grenze des dunklen Streifens $\Delta i = 0$	
	Str. Kr.	Str. Kr.	Str.	Kr.	Str.	Kr.	Str.	Kr.
0		0	+ 1,4	1,95	+ 2,4	2,9	+ 4,3	4,5
0,2		— 0,1	+ 1,3	1,9	+ 2,3	2,8	+ 4,1	4,45
0,4		— 0,2	+ 1,2	1,8	+ 2,1	2,75	+ 4,0	4,35
0,8		— 0,4	+ 0,9	1,6	+ 2,0	2,55	+ 3,9	4,25
1,0		— 0,5	+ 0,95	1,55	+ 1,9	2,4	+ 3,8	4,15
2,0		— 1,0	+ 0,5	1,1	+ 1,6	1,95	+ 3,7	
3,0		— 1,5	+ 0,25	0,8	+ 1,4	1,55	+ 3,6	
4,0		— 2,0	+ 0,1	0,15	+ 1,4		+ 3,6	
4,7		— 2,35	+ 0,05		+ 1,4		+ 3,6	
5,0	(— 2,5)[1]	— 1,8	0		+ 1,4		+ 3,6	
6,0	(— 3)	— 1,4	0		+ 1,4		+ 3,6	
8,2	— 4,1	— 1,4	0		+ 1,4		+ 3,6	
9,0	— 3,7	— 1,4	0		+ 1,4		+ 3,6	
10	— 3,6	— 1,4	0		+ 1,4		+ 3,6	
∞	— 3,6	— 1,4	0		+ 1,4		+ 3,6	

1) Für die eingeklammerten Stellen von Tab. X ist $\Delta i > 0$, aber relatives Minimum der Umgebung.

stellen, die in Tab. X angegebene Entfernung vom geometrischen Bildrand. Die Entfernungen vom geometrisch-optischen Bildrand ins Innere des hellen Bildes sind durch ein Minuszeichen von den Entfernungen nach außen (Pluszeichen) unterschieden. Die speziell für Lichtstreifen gültigen Zahlen sind in der Spalte *Str.*, die für Kreisscheiben gültigen in der Spalte *Kr.* in optischen Einheiten angegeben.

In Fig. 8 ist die Tabelle graphisch dargestellt. Die Ordinatenachse gibt durch ihre Bezifferung oberhalb der Abszissenachse die randsenkrechten Objektdurchmesser in optischen Einheiten an und stellt gleichzeitig den Ort der Durchmessermittelpunkte dar. Die halben Objektdurchmesser sind als Abszissen zu den Ordinaten eingetragen, so daß der Ort der geometrischen Endpunkte der Objekthalbmesser (nämlich der Randpunkte der halben geometrisch-optischen Bilder) durch die Gerade OG dargestellt wird. Trägt man zu den Ordinatenhöhen nach Tab. X von dieser Geraden aus die Randabstände der ausgezeichneten Kontraststellen parallel zur Abszissenachse ein, so stellen die gestrichelten Kurven I, G, A die Orte der inneren, mittleren und äußeren Grenze der Kontraststreifen, die Doppelkurven H und D die Orte maximalen Hell- und Dunkelkontrastes dar. Die punktierten Teile der Kurve G, D, A, geben die speziell bei Kreisscheiben gültigen Lagen an. Bemerkenswert ist, daß die Kurven I, die an beiden Bildrändern entlanglaufenden Kurven $\Delta i = 0$, bei einem Bilddurchmesser von 8,2 o. E. in eine zusammenfließen, d. h., daß dann beide hellen Kontraststreifen unmittelbar aneinandergrenzen. Dieser Zustand bleibt bestehen bis zur Bildbreite 4,7 o. E., indessen wird in diesem Bereich in der Grenzlinie (Bildmitte) nicht mehr der Kontrastwert 0, sondern nur ein relatives Minimum erreicht; m. a. W. die längs der Ordinatenachse zwischen 8,2 und 4,7 o. E. verlaufende I-Linie ist als Projektion der Sohle einer Talrinne anzusehen. Bei geringeren Bildbreiten als 4,7 o. E. hört die Grenze zwischen beiden Hellkontraststreifen auf; wir haben nur noch ein über der Bildmitte liegendes Kontrastmaximum. Gleichzeitig rücken die Kurven G, D, A nun mit abnehmender Bildbreite weiter vom idealen Bildrand ab. Die Abstände, die sie bei der Bildbreite Null haben, gelten für eine unendlich dünne Lichtlinie, bzw. für den ausdehnungslosen Lichtpunkt.

Will man die Darstellung von Fig. 8 gleichzeitig als Bild des Kontrastverlaufes an einer Ecke auffassen, so sind nahe der Spitze die strichpunktierten Modifikationen der Kurven D, A, G und das Hellkontrastmaximum auf der Ordinatenachse bei der Bildbreite 1,5 o. E. (durch den kleinen Kreis angedeutet) zu beachten. Würde man sich für diese Auffassung den Kontrastverlauf als Gebirgsmodell plastisch vorstellen, so ergibt sich, daß bei größerer Bildbreite (größerer Entfernung von der Spitze einer Ecke) jeder Bildrand innen von einem Wall (Hellkontrast), außen von einem Graben (Dunkelkontrast) begleitet wird. Von der Bildbreite 8,2 o. E. an beginnen beide Randwälle miteinander zu verschmelzen, indem sie eine immer flacher werdende Rinne zwischen sich lassen, die bei der Bildbreite 4,7 o. E. aufhört, um von hier ab in

eine Gratlinie überzugehen, die bei der Bildbreite 1,5 o. E. eine Kuppe aufweist. Während dieser Änderungen im Bildinnern entfernen sich die langsam abflachenden Gräben zeitweise ein wenig vom geometrisch-optischen Bildrand und fließen an der Spitze als ziemlich flache Mulde zusammen.

Fig. 8 geht in die Darstellung des Kontrastverlaufs für schwarze Bilder auf hellem Grunde über, wenn man die Vorzeichen der Kontrastextreme umkehrt, also H als Stelle des Dunkelkontrastes und D als Stelle des Hellkontrastes ansieht.

III.

Die Bildgrenze.

1. Ableitung der Definition.

a) Seeligers Modellmessungen.

Es handelt sich darum, aus den Kontrastmöglichkeiten die wirksame Bildbegrenzung durch Beobachtung auszusondern. Ein in jeder Beziehung einwandfreier Weg zur kritischen Prüfung der grundlegenden Definition wäre die Beobachtung an Modellen, in welchen die objektive Lichtverteilung von Beugungsbildern in stark vergrößertem Maßstabe nachgeahmt ist, wie sie Seeliger (VI, Kap. 2) mit einigen Herren der Münchener Sternwarte zum Nachweis der physiologischen Ursache der Vergrößerung des Erdschattens bei Mondfinsternissen angestellt hat. Leider ergibt die Überprüfung des Materials, daß das Auge gegenüber dem Winkelmaßstab, in welchem ihm das Modell des ersten der beiden Beispiele dargeboten wurde, als nicht genügend punktförmig empfindend anzusehen ist, und daß das zweite Beispiel nicht die charakteristischen Merkmale eines Beugungsbildes (Aufeinanderfolge eines hellen und eines dunklen Kontraststreifens) hat. Aber wegen ihrer historischen und praktischen Wichtigkeit mögen sie hier kurz besprochen werden.

1. Beispiel: Das Beugungsbild einer selbstleuchtenden Kreisscheibe vom Radius $u = 50$ o. E. wurde nach der Intensitätstabelle von Struve im Maßstabe 100 o. E. = 14,4 cm dadurch nachgeahmt, daß man eine tiefschwarze Kreisscheibe von 15 cm Radius mit einem entsprechend der Intensitätsstärke begrenzten weißen Sektor in schnelle Rotation versetzte. Unmittelbar vor der rotierenden Scheibe in Richtung auf den Beobachter stand ein schwarzer Schirm, durch dessen kreisförmige Öffnung man die rotierende Scheibe fast bis zum Rande frei erblicken konnte. Ein durch ein Lot beschwerter dünner Faden wurde durch Hin- und Herbewegen vor dem Schirm nach Angaben des 5 m entfernten Beobachters so eingestellt, daß er die scheinbare Begrenzungslinie rechts und links berührte; seine Stellung wurde beide Male an einem horizontalen Millimetermaßstab abgelesen und die Ablesungen zu einem Mittel vereinigt. Von den Beobachtern Seeliger, Villiger und List sind a. a. O. S. 23 je zwei Messungen bei verschieden starker Beleuchtung der Scheibe angeführt, die im Gesamtmittel einen Bildradius von 7,40 cm = 55,1 o. E. ergeben, d. h. eine Radienvergrößerung um 5,1 o. E. Bei 5 mm Pupillenöffnung faßt eine Zapfenbreite 4,7 o. E. Die Bildgrenze wurde also im Mittel um eine Zapfenbreite nach außen verlegt und ist daher so locker an die Kontrastforderungen gebunden, daß das Ergebnis für den gegenwärtigen Zweck zu unsicher bleibt.

2. Beispiel: Unter denselben Versuchsbedingungen wie oben wurde von Seeliger die Intensitätsverteilung in der Umgebung der geometrischen Grenze des Kernschattens der Erde bei Mondfinsternissen beobachtet. Es wurde, da der geometrische Kernschattenradius der Erde im Winkelmaß 2471″,2 beträgt, der Intensitätswert aus der radialen Entfernung $\gamma = 2460''$ in das Zentrum der rotierenden Scheibe, an ihren 15 cm entfernten Rand durch entsprechende Ausgestaltung des weißen Sektors der Intensitätswert aus $\gamma = 2560''$ Entfernung vom Mittelpunkt des Kernschattens verlegt.

Die Intensitätswerte selbst (VI, 17) und die zugehörigen Näherungswerte der Kontrastfunktion finden sich in folgender Tabelle zusammengestellt.

Tabelle XI.

Intensität und Kontrastwerte am Kernschattenrand der Erde bei Mondfinsternissen.

γ	$\mathcal{J}(\gamma)$	$c \cdot \Delta\mathcal{J}$
2460″	0,00151	— 20
70	164	0
80	178	+ 33
90	195	+ 63
2500	218	+ 113
10	251	+ 160
20	301	+ 203
30	371	+ 220
40	465	+ 217
50	579	+ 207
60	716	+ 200

Es zeigt sich der der geometrischen Kernschattengrenze entsprechende Nullwert bei $\gamma = 2470''$ und ein Maximum bei $= 2525''$, wobei zu bemerken ist, daß die Lage beider Werte sich numerisch nicht sicherer als auf 5″ festlegen läßt, weil die Tabelle der Funktionswerte für

die Interpolation nur gerade eben lang genug ist.

Die aus jeweils 13 Einzeleinstellungen der Beobachter: Seeliger, Villiger, List und Oertel gemittelten Einstellungen ergaben die gesehene Kernschattengrenze auf der rotierenden Modellscheibe im radialen Abstand 2521", während die Beobachtungen von Mondfinsternissen nach Hartmann (VI, 17) einen gesehenen Kernschattenradius von 2521",8 ergeben. Es besteht kein Zweifel daß in diesem Falle die Bildgrenze an die Stelle des Maximums der Kontrastfunktion verlegt wurde.

So lehrreich dieses Beispiel an sich ist, so wenig läßt sich das Ergebnis verallgemeinern, weil hier, wie bemerkt, eine wesentliche Bedingung — der außen anschließende Hellkontrast — fehlt. Volles Verständnis für diese Spezialbedingung ergibt sich übrigens erst aus der später folgenden Ausmessung eines Sternscheibchens bei künstlicher Fadenbeleuchtung.

b) Messung an geradlinigen Streifen.

Wir ziehen daher vor, die Beobachtungsbedingungen zunächst so weit als möglich zu vereinfachen, in dem wir das Bild eines Mikrometerfadens untersuchen (vgl. XXXVI).

Strehl hat gezeigt, daß ebene, auf das Objektiv eines Fernrohrs auftreffende Wellen in erster Näherung als ebene Wellenstücke das Okular verlassen; in Anlehnung an die Abbesche Theorie des Mikroskops darf man weiter schließen, daß dieser Zustand nicht wesentlich gestört wird, wenn ein Mikrometerfaden einen kleinen Teil des Lichtgewebes in der Objektivbrennebene abschattet. Das bedeutet physikalisch: man könne den Mikrometerfaden hinsichtlich seiner Abbildung durchs Okular ersetzen durch einen entsprechend breiten Schirm direkt am Objekt, wenn man nur das die Abbildung beeinflussende Öffnungsverhältnis des Instruments in Rechnung zieht.

Hieraus aber folgt wieder: das Beugungsbild des Mikrometerfadens muß bei „natürlicher Bildfeldbeleuchtung" (d. h. durch diffuses Himmelslicht) von der Größe der Ein- bzw. Austrittspupille des Fernrohrs, bei „künstlicher Bildfeldbeleuchtung" aber von der Größe der materiellen Öffnung im Okulardeckel abhängig sein. Um diese für die Theorie des Fadenmikrometers zweifelsohne wichtige Frage nachzuprüfen, habe ich am Refraktor der Münchener Sternwarte (Öffnung 285 mm) bei beiden Beleuchtungsarten und verschiedener Okularvergrößerung die Fadenbreite dadurch gemessen, daß ich den beweglichen Faden des Mikrometers beiderseits soweit an den festen Faden heranführte, bis der helle Zwischenraum der Fadenbreite gleich war. Die in folgender Tabelle vereinigten Ergebnisse stellen je das Mittel aus drei Einstellungen dar.

Tabelle XII.

Breite eines Mikrometerfadens bei verschiedener Okularvergrößerung am 285 mm-Refraktor der Münchner Sternwarte.

Ok.-Nr.	Vergrößerung	Natürl. Feldbeleuchtung		Künstl. Feldbeleuchtung	
	$\varkappa$	A. P.	Fadenbreite	Ok.-Blende	Fadenbreite
I	95	2,99 mm	1",49	3,5 mm	1",82
II	148	1,92	1,23	3,5	1,51
III	235	1,21	0,95	3,5	1,32
IV	345	0,82	0,77	2,4	0,85
V	475	0,60	0,71	3,2	0,82
VI	630	0,45	0,71	1,6	0,74
VII	890	0,32	0,74	1,25	zu lichtschwach
II	148			1,25	1,54

Ein erster Blick auf die Zahlen zeigt ein nach dem seitherigen Standpunkt absurdes Ergebnis, denn mit wachsender Okularvergrößerung erfolgt trotz des bei natürlicher Feldbeleuchtung konstanten Öffnungsverhältnisses des Instrumentes eine gesetzmäßige Abnahme der gemessenen Fadenbreite — und ähnliches zeigt die Reihe bei künstlicher Feldbeleuchtung trotz des ziemlich regellos variierten Öffnungsverhältnisses; ja das Okular II ergibt bei künstlicher Beleuchtung fast das gleiche Resultat bei Okularblenden von 3,5 mm und 1,25 mm Durchmesser. Obendrein sind die Messungsergebnisse bei künstlicher Beleuchtung trotz des gesteigerten Öffnungsverhältnisses im allgemeinen größer als bei natürlicher Beleuchtung, wiewohl eben wegen des Gewinnes an Öffnungsverhältnis die Beugungswirkung sich verringert.

Die Messungen wären mit Tab. III vergleichbar, wenn die Breite des geom.-opt. Fadenbildes etwa in Mikrometerteilen (β'') bekannt und in opt. Einheiten (u) umgerechnet wäre. Da das nicht der Fall ist, muß versucht werden, diesen Wert aus den Meßergebnissen selbst zu ermitteln. Die am angegebenen Orte ausgeführte Überlegung ergibt o",73 als wahren Wert für die geom.-opt. Fadenbreite.

Die weitere Aufgabe besteht nun in der Ableitung der einzelnen Meßergebnisse aus diesem Ausgangswert im Vergleich mit der Lage der Kontraststellen und dem Bau der Netzhaut. Für natürliche Feldbeleuchtung entspricht die geom.-opt. Bildbreite von o",73, bei allen Okularen einer Ausdehnung von 5,43 opt. Einheiten; nach Tabelle III könnte also bei Einstellung auf das Minimum von Δi die gemessene Faden

breite $5{,}43 + 2 \cdot 1{,}4 = 8{,}23$ opt. Einheiten oder $1''{,}11$ betragen, bei Einstellung auf die äußerste Nullstelle von Δi auch $5{,}43 + 2 \cdot 3{,}6 = 12{,}63$ opt. Einheiten oder $1''{,}71$. Tabelle XII zeigt zwar, daß die tatsächlichen Einstellungen zwischen diesen Grenzen liegen, aber bei den ersten Okularen keine ausgesprochene Vorliebe für diese Werte zeigen. Das kann daran liegen, daß die Netzhaut des Auges wegen der endlichen Ausdehnung der Zapfenelemente besonders bei geringeren Okularvergrößerungen nicht genügend punktförmig empfindet gegenüber der ihr gebotenen Lichtverteilung, und müßte sich darin verraten, daß die gemessenen Fadenbreiten bei schwachen Okularen ganze Vielfache des Mikrometerwerts eines Zapfendurchmessers sind. Man hat nach Anm. S. 9

$$\beta_z'' = \frac{36'',1}{\Gamma}.$$

Die hiernach gerechneten Mikrometerwerte eines Zapfendurchmessers ($3\ \mu$) finden sich in der zweiten Spalte von Tabelle XIII, die dritte Spalte gibt die mit den ersten vier Okularen bei natürlicher Feldbeleuchtung gemessenen Fadenbreiten in Zapfendurchmessern. In der vierten Spalte ist, gleichfalls in Zapfendurchmessern die Breite des Mikrometerfadens beigefügt, wenn auf das innere Maximum von Δi eingestellt worden wäre; diese Breite beträgt nach Tabelle III um $2 \cdot 1{,}6$ opt. Einheiten weniger als die geom.-opt. Bildbreite von 5,43 optischen Einheiten, also $2{,}23$ opt. Einheit oder $0''{,}301$; die fünfte Spalte gibt die Differenz zwischen Spalte 3 und 4.

Tabelle XIII.

Natürliche Beleuchtung.

Okular-Nr.	Zapfen-durch-messer	Fadenbreite in Zapfendurchmessern		Differenz
		gemessen	zwischen Δi = max.	
I	$0''{,}380$	3,92	0,79	3,13
II	244	5,05	1,23	3,82
III	153	6,20	2,00	4,20
IV	104	7,35	2,90	4,45

Mit Deutlichkeit erkennt man aus Spalte 3, daß tatsächlich bei den schwachen Okularen nach ganzen Vielfachen von Zapfendurchmessern eingestellt wurde, also zweifellos von einer Einstellung nach zweiten Differentialquotienten (Kontrastfunktion) nicht die Rede sein kann. Die Netzhaut arbeitet hier nach zweiten Differenzenquotienten, deren Abszissenintervalle eben die Zapfendurchmesser sind. Zur Abschätzung eines Wertes des zweiten Differenzenquotienten muß man sich aber offenbar mindestens drei einander benachbarte Zapfen in Tätigkeit denken. Wenn nun etwa nahe dem Bildrande ein Zapfen das innere Kontrastminimis registriert, so kommt daher höchstens der nächste in die Lage, den Nullwert der Kontrastfunktion konstatieren zu können, m. a. W.: eine Empfindung für den Kontrastnullwert kann erst um mehr als einen Zapfendurchmesser von der nach innen benachbarten Kontraststelle entfernt erfolgen. Vergleicht man nun obige Werte in Spalte 3 mit der scheinbaren Fadenbreite zwischen den inneren Kontrastminimis in Spalte 4, so sieht man an den halben Differenzen der Spalte 5, daß in der Tat die gemessenen Bildgrenzen 1,6 — 2,2 Zapfendurchmesser außerhalb der benachbarten Kontraststelle eingestellt wurden. Damit erscheinen die Messungen in einem ganz anderen Lichte, denn danach sind sie nur als Einstellungen auf die mittlere Nullstelle der vom Auge durch den Netzhautbau modifiziert empfundenen Kontrastfunktion aufzufassen, die theoretisch und bei starker Okularvergrößerung mit der geom.-opt. Bildgrenze zusammenfällt, bei schwachen Okularen aber wegen zu grober Differenzierungsmöglichkeit gegenüber der Lichtverteilung um $1^1/_2$—2 Zapfendurchmesser nach außen verschoben wurde.

Im übrigen wird die Richtigkeit der Ableitung weiter gestützt, wenn es gelingt, auch die Messungen bei künstlicher Feldbeleuchtung einwandfrei abzuleiten. Die folgende Übersicht der Beobachtungen bei künstlicher Feldbeleuchtung enthält in der zweiten Spalte die nach Gl. (6a) gerechneten Mikrometerwerte der opt. Einheit, in der dritten Spalte die nach Gl. (7) gerechneten Mikrometerwerte des Zapfendurchmessers, in der vierten die Werte der Zapfendurchmesser in optischen Einheiten, in der fünften die gemessenen Fadenbreiten aus Tabelle XII in opt. Einheiten, in der sechsten in Zapfendurchmessern ausgedrückt.

Spalte 7 und 8 fügen die geom.-opt. Fadenbreite in opt. Einheiten und Zapfendurchmessern hinzu.

Nach Spalte 6 kann wiederum kein Zweifel bestehen, daß die Messungen mit außerordentlicher Präzision nach ganzen Zapfendurchmessern erfolgen. Nur die Messung mit Okular III macht eine Ausnahme in der ausgesprochenen Annäherung an eine ganze Zahl. Neben den Ziffern der Spalte 6 sind daher die entsprechenden ganzen Zahlen in Klammern beigefügt, mit denen die weitere Überlegung arbeitet. Wenn diese Zahl gerade ist, bildet die geom. Bildmitte die Grenze zweier benachbarter Zapfenelemente, wenn sie ungerade ist, halbiert sie das mittlere bildauffangende Element — dies zu beachten ist wichtig für die Auffindung der Zapfen, welche

Tabelle XIV.

Künstliche Feldbeleuchtung.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ok.-Nr.	1 opt. Einh.	1 Zapfendurchmesser	in opt. Einh.	Gemessene Fadenbreite in opt. Einh.	in Zapfendurchm.	Geom. o″,73 in o. E.	Bildbreite in Zapfendurchm.	Gesehene Fadenbreite nach Theorie	nach Beob.
I	0″,116	0″,380	3,28	15,7	4,80 (5)	6,30	1,93	1″,89	1″,82
II	074	244	3,30	20,4	6,18 (6)	9,30	2,98	1,47	1,51
III	047	153	3,26	28,1	8,62 (9?)	15,5	4,75	1,08	1,32
IV	046	104	2,26	18,5	8,20 (8)	15,8	7,00	0,83	0,85
V	025	076	3,04	32,8	10,78 (11)	29,2	9,60	0,84	0,82
VI	038	057	1,50	19,5	13,00 (13)	19,2	12,80	0,74	0,74
II red.	208	244	1,17	7,4	6,32 (6)	3,5	2,99	1,46	1,54

die als theoretische Grenze des Bildes vermutete mittlere Nullstelle von Δi empfinden. Beispielsweise zeigen die Zahlen für Okular III, daß die halbe geom.-opt. Fadenbreite 2,37 und die halbe gemessene Bildbreite $4^1/_2$ Zapfendurchmesser beträgt; ein Vergleich der zugehörigen Ziffer in Spalte 7 mit der Lage der Kontraststellen nach Tabelle III ergibt sofort, daß das erste halbe Zapfenelement von der Mitte aus noch nicht von den Randphänomenen getroffen wird, das zweite ganze die innere Nullstelle Δi empfinden wird, das dritte ganze das Maximum; dieses Zapfenelement ragt indessen schon um $2{,}5 - 2{,}37 = 0{,}13$ Zapfendurchmesser über den geom.-opt. Bildrand hinaus und da höchstens das nächste für die Empfindung des mittleren Nullwertes des Kontrastes in Frage kommt, so ist theoretisch die gesehene Bildgrenze mit Okular III um $1{,}13$ Zapfendurchmesser $= 1{,}13 \cdot 0'',153 = 0'',177$ außerhalb des geom.-opt. Bildrandes, also eine Bildbreite von $0'',73 + 2 \cdot 0'',177 = 1'',08$ zu erwarten. Behandelt man die übrigen Beobachtungen in gleicher Art, so werden die Werte der Spalte 9 erhalten, deren Übereinstimmung mit den tatsächlichen Beobachtungswerten in Spalte 10 als vollkommen bezeichnet werden darf, wenn man von der einzigen offenbar durch einen Meßfehler gestörten Beobachtung mit Okular III absieht.

Als durchaus gesichertes Ergebnis ist daher zu buchen: Die eingangs skizzierte Auffassung der opt. Abbildung der Mikrometerfäden ist berechtigt und für die Theorie des Mikrometers, ausreichend.

Als Bildgrenze der Mikrometerfäden sieht das Auge die Grenze zwischen dem dunklen und hellen Kontraststreifen am Bildrand, die im allgemeinen mit der geom.-opt. Bildgrenze identisch ist.

Bei geringer Okularvergrößerung wird die Bildbreite in angebbarer Weise (infolge der Zapfenstruktur der Netzhaut) über den theoretischen Grenzwert hinaus vergrößert.

Die letzte Aussage berechtigt zu der Frage: Wie stark muß denn die Okularvergrößerung sein, um von Messungsfehlern aus der endlichen Netzhautstruktur frei zu werden? Die dafür zu erhebende Mindestforderung bleibt natürlich teilweise je nach der individuellen Ansicht über das ausreichende Maß an Meßgenauigkeit willkürlich, indessen ist aus den vorigen Überlegungen so viel klar, daß die Kontraststellen nur dann nahe ihrem theoretischen Ort empfunden werden können, wenn das engste Intervall zwischen zwei benachbarten Kontraststellen (nach Tab. X beträgt es 1,4 opt. Einheiten) von 2—3 Zapfendurchmessern ausgefüllt wird. Setzen wir daher in Gl. (5a) $\varrho = 2{,}5 \cdot 3\mu = 7{,}5\mu$ und $u = 1{,}4$, so ergibt sich:

$$\frac{I'}{I'_0} = \frac{7 \cdot 5}{0{,}64 \cdot 1{,}4} = 8{,}35,$$

also 8—9fache Normalvergrößerung. Das bedeutet für Fernrohre mit dem Öffnungsverhältnis 1:15 bzw. 1:10 Okulare von der Brennweite $\frac{5}{8{,}35} \cdot 15 = 9\,\text{mm}$ bzw. $\frac{5}{8{,}35} \cdot 10 = 6\,\text{mm}$, also Ergebnisse, die mit den aus eingehender Beobachtungspraxis gewonnenen Erfahrungen vorzüglich harmonieren.

Offenbar kann man im gegenwärtigen Beispiel einmal jeden Mikrometerfaden als allein gesehenes Bild auf hellem Grunde auffassen, zum andern kann aber auch der helle Zwischenstreifen als allein gesehenes Bild auf dunklem Grunde gelten. Daher ergibt sich — wenn bei der Ausführung von Beobachtungen die eben abgeleitete Bedingung erfüllt war — und das ist bei fast allen astronomischen Messungen der Fall — über die Lage einer gut definierten Bildgrenze folgende allgemeine Regel (XXXVII).

An alleinstehenden (und kombinierten) Bildern sieht das Auge eine gut definierte

Grenze dort, wo eine zwischen beiden Randkontrasten liegende kontrastfreie Zone ($\Delta i = 0$) an den Dunkelkontraststreifen angrenzt.

c) Irradiationsmessungen.

Eine Art Kontrolle des Vorigen ergeben die berühmten Messungen der „Irradiation“[1]) von Volkmann und Aubert (II, 14 u. f.). Beide Autoren haben zwei gleiche, einander parallele Lichtstreifen auf schwarzem Hintergrund (und in derselben Weise später schwarze Streifen auf hellem Grunde) einander soweit genähert, bis der Zwischenraum ebenso breit erschien wie die Streifen. Nennt man die tatsächliche Streifenbreite in Winkelmaß b, die tatsächliche Breite des Zwischenraumes d und die „Irradiationsverbreiterung“ eines Streifens $2z$, so wurde also d so bemessen, daß:

$$b + 2z = d - 2z.$$

Ein positives z gibt demnach an, um welchen Winkelbetrag die gesehene Bildgrenze außerhalb der geometrisch-optischen Bildgrenze liegt. Bildet man bei Auberts Meßergebnissen $b + 2z$, die scheinbare Strichbreite, so hat man

94″,5	bei $b = 40''{,}5$	$u = 5{,}3$
84 ,0	24 ,6	3,2
81 ,2	15 ,3	2,0
82 ,0	10 ,0	1,3,

d. h. wenn man eine normale Zapfenbreite von 36″,5 annimmt, so hat Aubert die Streifen stets in der Breite von 2,3 Zapfen, d. h. abwechselnd in 2 oder 3 Zapfenbreiten gesehen. Nimmt man, da Angaben fehlen, weiter 5 mm Pupillenöffnung an, so erhalten die wahren Streifenbreiten b die unter u stehenden Breiten in opt. Einheiten. Da sich die Zapfen bei diesen geringen Breiten natürlich symmetrisch zum inneren Hellkontrast gelegt haben, so ist die Bildgrenze wieder an der durch die Zapfen modifizierten Nullstelle zwischen beiden Kontraststreifen gesehen worden.

Ähnlich ist die sog. negative Irradiation (II, 16). Im allgemeinen erscheinen nämlich schwarze Streifen auf weißem Grunde schmäler als sie ihrer geometrisch-optischen Bildausdehnung nach erscheinen sollten — eben weil, wie durch die obige Beobachtungsdarstellung bewiesen wird, die gesehene Grenze des weißen Grundes noch innerhalb der geometrisch-optischen Bildgrenze des schwarzen Streifens liegen kann. Sehr schmale schwarze Streifen dagegen — und das nennt man negative Irradiation — erscheinen wiederum verbreitert. Die von Aubert vorliegenden Messungen zeigen

$b + 2z$	b
81″	45″
75″	33″
64″,5	21″,5,

so daß für sie dieselbe Aussage gilt wie oben.

Zugleich ist hiermit erwiesen, daß die vermeintliche „positive und negative Irradiation“ nichts anderes ist als eine Folge der Lichtbeugung, modifiziert durch die endliche Ausdehnung der Netzhautelemente.

2. Messung mit Mikrometerfaden.

a) die Kreisscheibe.

In der Kontrastregel für gesehene Bildgrenzen muß die Regel für gemessene Bildgrenzen enthalten sein, da der Sehakt selbst auch bei kombinierten Bildern nicht anders verlaufen kann als dort. Denken wir an ein helles Objekt (weißer Streifen oder Kreis) einen dunklen Mikrometerfaden herangeführt, so erhält der Mikrometerfaden im allgemeinen seine Grenzkontraste durch die Randintensität des hellen zu messenden Bildes. Ein Ausgleich der einander entgegengesetzten Außenkontraste von Bild und Faden zu einer Zone $\Delta i = 0$ erfolgt offenbar vollkommen, wenn die messende Kante des Fadens an die äußere Nullgrenze des Dunkelkontrastes um das helle Bild herangeführt wird. In der entstandenen Zone $\Delta i = 0$ wird nun $e = i$, d. h. sie erscheint aufgehellt und wird zum hellen Objektbild gezählt. Wir schließen daher, die Durchmesser heller Bilder müssen mit dem Fadenmikrometer (bei natürlicher Feldbeleuchtung) um die Breite des äußeren Dunkelkontrastes zu groß gemessen werden.

Tatsächlich ist bei Fadenmikrometermessungen eine Abhängigkeit des Planetendurchmessers von der Objektivöffnung schon lange vermutet worden. Ältere Messungsreihen lassen sich schwer als überzeugende Beispiele heranziehen, weil meistens die für die Reduktion erforderlichen Angaben nicht zu beschaffen sind und recht oft auch deshalb — was für unsern Zweck das ärgste Hindernis ist —, weil gerade geübte Beobachter ein deutliches Gefühl für die eigenartigen Beugungsverhältnisse am Mikrometerfaden hatten und, um hieraus entspringende Fehler zu eliminieren, den Faden statt bis zur scheinbaren Randberührung noch ein Stückchen in die helle Scheibe hinein zu führen pflegten. So schreibt z. B. Lohse (XXX, 22): „Wenn im Gesichtsfelde des Fernrohrs ein Mikrometerfaden z. B. mit der leuchtenden Scheibe eines Planeten in Berührung kommt, so entstehen

[1]) W. Struve (III, 50) hält mit Helmholtz noch die Irradiation für eine von der Lichtbeugung streng verschiedene Erscheinung.

eigentümliche Bildverzerrungen durch Beugung des Lichtes. Die Folge davon ist, daß Durchmesser, von Planetenscheiben mit Filiarmikrometern leicht etwas zu groß gemessen werden, selbst wenn man glaubt den Faden so weit herangebracht zu haben, daß er ein wenig in die Scheibe einschneidet."

Daß unsere Auffassung den Tatsachen gerecht wird, läßt sich dagegen an folgenden Beispielen einer neueren Venusradiusbestimmung zeigen, auf welche Herr Dr. G. Struve aufmerksam machte; eben weil sie von dem wahrscheinlichsten Wert des Venusradius erheblich abweicht. G. Struve beobachtete in Neubabelsberg 1921 April 4. bis Mai 9. vor und nach der unteren Konjunktion den Planeten Venus am Toepferschen Durchgangsinstrument (190 mm Öffnung, 2,50 m Brennweite) bei 300facher Okularvergrößerung, indem er den beweglichen Mikrometerfaden dem von der Sonne hellerleuchteten Rande der Venussichel (diesen berührend) nachführte. Bei der Ableitung des Planetenortes aus den Meridianbeobachtungen wurde der Planetenradius als Unbekannte in die Bedingungsgleichungen aufgenommen und ergab sich als Mittel aus den 14 Beobachtungstagen zu 9″,072.

Gegenüber den Hartwigschen „wahren" Werten erscheint der Struvesche Venusradius um ca. 0″,26 zu groß.

Die Venussichel hatte während der Beobachtungen eine durchschnittliche Breite von ungefähr 10″, d. h. da eine optische Einheit des Instruments bei voller Öffnung 0″,20 beträgt, ungefähr von 50 o. E. Bei der angewandten Okularvergrößerung wurde die Austrittspupille des Fernrohrs auf 0,6 mm verringert, so daß ziemlich hinreichende Okularvergrößerung vorliegt und die Einstellung des Mikrometerfadens auf die II. äußere Nullstelle der Kontrastfunktion erfolgt sein muß, welche nach Tab. X um 3,6 o. E. also hier um 0″,73 außerhalb des geometrisch optischen Bildrandes liegt.

Nun haben Struves Beobachtungen bei einer mittleren Entfernung der Venus von der Erde von 0,306 stattgefunden und bei der Reduktion auf die Entfernungseinheit konnte sonach nur der Betrag $0'',7326 \cdot 0{,}306 = 0'',224$ der Radienvergrößerung ins Endresultat eingehen. Subtrahiert man diesen Betrag von Struves Wert 9″,072, so ergibt sich als wahrer Venusradius 8″,848, der nur um 0″015 von dem als richtig anzusehenden Hartwigschen Wert 8″,833 abweicht. Über weitere Reduktionserfolge dieser Art vergleiche man auch G. Struve, „Durchmesserbestimmung des Planeten Venus" und Kühl, „Über den sog. konstanten Messungsfehler bei Bestimmung des Venusdurchmessers". Astron. Nachr. Januar 1925, Nr. 5348.

Mit Rücksicht hierauf darf man wohl die Vermutung auszusprechen wagen, daß die von Courvoisier (XXXI) aus Rektaszensionsbeobachtungen der Venus errechneten Beträge für die sog. „jährliche Refraktion" zum Teil, wenn nicht gänzlich zum Verschwinden gebracht werden, sobald auf Elimination des Kontrastfehlers genügend Rücksicht genommen wird, außer bei den Beobachtungen in oberer Konjunktion, bei denen die Scheibe durch den Faden biseziert war[1]).

Da Rektaszensionsfehler eine wichtige Rolle bei der Prüfung der Perihelbewegung des Merkurs spielen, so ist von vorneherein zu vermuten, daß die Rücksichtnahme auf die betreffenden Kontrastreduktionen das erhaltene Resultat beeinflussen werden. In der Tat führt die Newcombsche Diskussion der Meridianbeobachtungen des Merkur nach Grossmanns kritischer Besprechung (XXXIII, 49, 1) auf Rektaszensionsdifferenzen, welche von der Phase abhängen und im Sinne der Kontrastfehler verlaufen.

b) Der Lichtpunkt.

Wenn man versucht, durch Messungen die Kontrastziffern des Lichtpunktes an Sternen nachzuprüfen, so ist zu bedenken, daß das Bild des Mikrometerfadens auf der Netzhaut im allgemeinen durch künstliche Feldbeleuchtung entworfen wird und daher längs seiner Kanten Kontrasterscheinungen von anderem Abstandsmaßstab auftreten als am Sternbild (vgl. S. 19).

Wir greifen als Messungen dieser Art zunächst einige Messungen von Villiger aus den Jahren 1901 und 1902 an α-Aurigae heraus, die seinerzeit zum Studium der Szintillation (XX) ausgeführt wurden. In der ersten Spalte von Tab. XV findet man die Objektivöffnung, auf welche der Münchener Refraktor abgeblendet wurde, in der zweiten, die zur Objektivöffnung gehörige Normalvergrößerung Γ_0, in der dritten den gemessenen Durchmesser der Sternscheibe, in der vierten den Mikrometerwert einer optischen Einheit nach Gl. (6a) und in der fünften Spalte die Anzahl der o. E., welche auf den zu 3μ angenommenen Abstand zweier Zapfenmittelpunkte der Netzhaut entfallen. Die übrigen Zahlen werden sogleich erklärt.

Obwohl hier ein komplizierteres Lichtgebilde als eine Planetenscheibe zu messen ist, besteht kein Grund das dort bewährte Auffassungsprinzip nicht auch hier anzuwenden. Man wird also voraussetzen, daß der Faden das Sternbild zu berühren scheint, wenn sein Außen-Hellkontrast gerade auf das Außen-Dunkelkontrastmaximum

1) Vgl. G. Struve, Astron. Nachr. März 1924, Nr. 5274.

Tabelle XV.

Durchmessermessung an α-Aurigae ($0,^m8$)
München 10. II. 02 Zenithdist. $10^0,6$
10′ Refraktor $\Gamma = 475$.

Obj. Öffng. mm	Γ_0	Sterndurchm beob. "	Mikrometerwert von 1 o. E. "	Zapfendurchm. o. E.	Sterndurchm. n. Theorie "
284	57	0.82	0,135	0,59	0,85
148	30	1.46	0.256	0.31	1,55
90	18	2,59	0,428	0,19	2,55
30	6	5,60	1,270	0,07	(7,35)5,17

des Sternscheibchens fällt, also einen Ausgleich zur Erzeugung einer Stelle $\Delta i = 0$ hervorruft. Das Außenkontrastminimum des Sternscheibchens liegt im Mittelpunktsabstand 2,89 o. E. und wird maßstäblich durch die Mikrometerwerte der o. E. in Spalte 4 von Tabelle XV festgelegt. Der durch künstliche Feldbeleuchtung verursachte Kontrast am Faden dagegen wird maßstäblich durch den Mikrometerwert einer o. E. für die Okulardeckel-Öffnung von Okular V (vgl. S. 21) bestimmt, der 1 o. E. = o″,025 beträgt. Die wirkliche Fadenbreite (o″,73) umfaßt in diesem Maßstab also fast 30 o. E. und das äußere Kontrastmaximum des Fadens liegt daher im Randabstand 1,4 o. E. = o″,035. Der Sterndurchmesser muß demnach gemessen werden zu (5″,78 × Wert aus Spalte 4 Tab. XV + o″,07). Diese Werte stehen in Spalte 6 verzeichnet — bis auf den letzten in vollkommener Übereinstimmung mit der Beobachtung. Bei der letzten Messung ist offenbar durch die enorme Übervergrößerung $\left(\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = 75\right)$ der Dunkelkontrast um das Sternscheibchen stark verflacht, so daß nur noch die Außengrenze des Hellkontrastes am Faden (Randabstand 3,6 o. E. = o″,09) mit der Nullstelle zwischen den Sternbildkontrasten (Mittelpunktsabstand 1,96 o. E. = 2″,494) zur Deckung kommen konnte, was immer noch einen passablen Ausgleich beider Kontraste ermöglicht. Dies würde dann einen gemessenen Durchmesser von 5″,17 ergeben.

Ebensogut bestätigt sich eine zweite Messungsreihe desselben Verfassers vom 5. Dezember 1901, welche Sterndurchmesser an Sternen 4^{ter} bis 8^{ter} Größe in verschiedenen Zenithdistanzen enthält. Die erste Spalte der folgenden Tabelle gibt die Katalognummer des Sterns im II. Teil der Potsdamer photometrischen Durchmusterung (P. D. II), die zweite die wahre Zenithdistanz, die dritte die Helligkeit, die vierte den gemessenen Durchmesser des Sternbildes. Theoretisch ergibt sich hier nach dem Kontrastprinzip wie oben das Messungsresultat für den Sterndurchmesser zu $2\,(2{,}89 \cdot o'',135 + 1{,}4 \cdot o'',038) = o'',886$ in vorzüglicher Übereinstimmung mit den Messungen bis zu mittleren Zenithdistanzen; bei großen Zenithdistanzen dagegen liegt ein durch Szintillation gegenüber dem reinen hier behandelten Beugungsbild merklich vergrößertes Bild vor. — Außer der Bestätigung der Auffassung des Meßvorganges an einem komplizierteren Bilde, ist die neue Erfahrung zu buchen, daß überstarke Vergrößerung die Kontraste verwaschen und daher die Messung wieder unsicher macht.

Tabelle XVI.

Sterndurchmesser-Messungen.
München 5. 12. 01. 10′ Refraktor-Öffnung 284 mm $\Gamma = 630$ Ok. VI. (Öffnung 1,6 mm 1 o. E. = o″,038).

PD II Nr.	ζ^0	m	Durchm. beob. "	Durchm. theor. "
213	32.9	4.9	0.84	o″,886
211	30.0	7,8	87	
215	27.7	6,5	86	
671	51.8	5.9	88	
672	51,0	4.1	91	
683	50.1	7.5	96	
1028	67.3	7.5	97	
1030I	61,9	5.7	97	
1030II	61.0	5.7	95	

3. Doppelbilder.

a) Doppelsterne.

Von besonderem Interesse werden die Erscheinungen an der Bildbegrenzung bei der Annäherung eines zweiten Lichtpunktes an den ersten, ein Fall der für Doppelsternmessungen und gewisse Methoden der visuellen und photographischen Parallaxenbestimmung praktische Bedeutung hat.

Denkt man sich zunächst zwei gleich helle Lichtpunkte einander genähert, so werden sich ihre Beugungsbilder sehr bald teilweise überdecken. In den überdeckten Gebieten wird die Intensität, sofern beide Lichtpunkte inkohärent leuchten, was ja im allgemeinen der Fall ist, gleich der Summe der Intensitäten beider Beugungsbilder an jedem Ort, d. h. es werden die Isophoten in der Verbindungslinie der Zentren beider Beugungsbilder aus der ursprünglichen Kreisform gegeneinander herausgebogen und bei wachsender Annäherung mehr und mehr Eiform zeigen. Wenn das Auge die Bildgrenze längs einer Kurve konstanter Helligkeit sähe, müßten also nahe Doppelsterne tropfenförmig aufeinander zu verlängert erscheinen und die

Messung ihrer Distanz müßte eine geringere Entfernung ergeben als der Wirklichkeit entspricht, denn nach den gebräuchlichen Meßmethoden wird die Lage des Zentrums einer Lichtscheibe mit dem Mittel ihrer beiden den Durchmesser begrenzenden Bildränder identifiziert. Die Untersuchung der Kontrastfunktion liefert ein direkt entgegengesetztes Resultat:

Denkt man sich die beiden gleich hellen Sterne bis auf den Abstand $u = 4{,}0$ ihrer Zentren genähert (wobei sich die Kreise der ungestörten Nullinien bei $u = 1{,}96$ der Kontrastfunktion fast berühren würden), so erhält man die aus dem Zusammenwirken resultierende Kontrastfunktion in Fig. 9 durch die gezeichneten Kurven der Nullstellen, Minima und Maxima dargestellt, die im Außenteil mit den entsprechenden Kurven des Einzelsterns identisch sind. Nimmt man an, daß auch der erste Beugungsring des Einzelsterns sichtbar ist, so zeigt die λ-förmig laufende Gratlinie der Kontrastfunktion die Linie größter Dunkelheit zwischen Beugungsscheibe, Beugungsring und zwischen beiden Zentralbildern an. Als gesehene Bildgrenzen müssen gemäß S. 21 die Nullinien G aufgefaßt werden. Es werden also auch bei dieser starken Annäherung beide Sternbilder noch durch eine schmale dunkle Furche von der Breite $u = 0{,}6$ in der Zentrallinie getrennt erscheinen. Die Faden-Messung (künstliche Feldbeleuchtung, Einstellung symmetrisch zum Kontrastmaximum), würde dann die Sternzentra bei $x = 4{,}4$ und $-0{,}4$, daher die Distanz zu 4,8, also um 0,8 o. E. zu groß ergeben. Der erste Beugungsring umschließt in fast elliptischer Form das Gebilde und zeigt in der Mittelsenkrechten der beiden Sterne zwei Lichtknoten, die sich von leichter Schattierung umgeben, von dem übrigen Ring abheben, deren einer in Fig. 9 beiderseits der Abszisse $x = 2$ erkennbar ist.

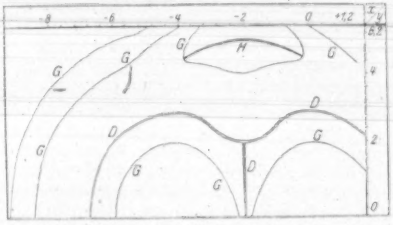

Fig. 9.

Kontrastverlauf bei einem Doppelstern aus gleichhellen Komponenten an der Grenze ihrer Trennbarkeit.

G: Kurven $\Delta i = 0$ um die Komponenten und die 1. Beugungsringe.
D: Kurven $\Delta i =$ max (höchster Dunkelkontrast).
H: $\Delta i =$ min (höchster Helligkeitskontrast).

Obgleich man auch bei etwas weiterer Annäherung noch an der elliptischen Form des Mittelbildes das Vorhandensein eines Doppelsterns erraten kann, scheint doch der durch Fig. 9 dargestellte Moment gleichzeitig die Definition der Trennbarkeitsgrenze zweier gleich heller Lichtpunkte darzustellen, denn nur geringe Unterschreitung der Distanz $u = 4$ läßt das Mittelbild in eins zusammenfließen. Strehl (IV, 118, 8), der die Grenze der Trennbarkeit gleich heller Sterne dadurch definiert, daß die Helligkeit in der Mittellinie konstant wird, kommt auf die Distanz $u = 3{,}2$ o. E.

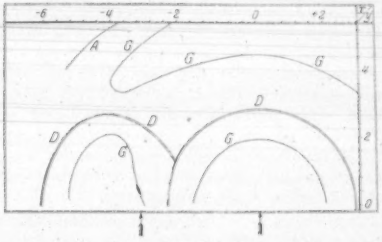

Fig. 10.

Kontrastverlauf bei einem engen Doppelstern mit dem Intensitätsverhältnis der Komponenten 1 : 10. (Bedeutung der Kurven wie in Fig. 9.) $\rightarrow$: Orte der geom.-opt. Bildpunkte.

Der Ziffernunterschied ist selbstverständlich und gering, weil Strehl als Trennbarkeitsgrenze einen Moment herausgreift, in welchem der bereits zusammengeflossene Doppelstern noch eben als länglich erkannt werden kann, während hier die Trennbarkeitsgrenze den Moment bezeichnet, in welchem die bisher getrennten Sternbilder in der Mittellinie zusammenfließen.

Die Abplattung der Bilder und die Distanzfehler werden noch auffälliger, wenn man einen Doppelstern mit ungleich hellen Komponenten betrachtet. In Fig. 10 findet man den Verlauf der Kontrastfunktion durch ihre charakteristischen Linien dargestellt für ein Doppelsternpaar, dessen linke Komponente $\frac{1}{10}$ der Intensität der rechten hat, deren wahre Distanz $u = 3{,}2$ beträgt. Sie ist erhalten durch entsprechende Überdeckung und Addition zweier Stern-Kontrastziffernfelder, in deren eines gemäß den Bemerkungen von S. 7 die Kontrastwerte nur mit einem Zehntel ihres Normalbetrages aufgenommen waren. Die Annäherung ist soweit getrieben, wie es ohne Zusammenfließen der Bilder überhaupt möglich ist. Man erkennt, daß die schwache Kom-

ponente sich durch einen länglichen Lichtknoten auf dem ersten Beugungsring der hellen Komponente bemerkbar macht, aus dessen Lage sich die instrumentell meßbare Distanz beider Sterne zu

$$\frac{6{,}0 + 2{,}3}{2} - \frac{2{,}3 - 2{,}8}{2} = 4{,}4,$$

d. h. um 1,2 o. E. zu groß ergibt; und zwar trifft die fehlerhafte Messung hier fast ausschließlich die schwache Komponente. Es scheint nicht unwichtig, darauf hinzuweisen, daß der in Fig. 10 dargestellte Sonderfall in der Beobachtungsliteratur bekannt ist; Strehl (IV, 120) erwähnt, daß Klein in seiner „Durchmusterung des Himmels" von dem Fernrohr eines Grafen Hahn erzählt, das einen Doppelstern dadurch aufgelöst habe, daß die schwache Komponente als Verstärkung im Beugungsring der hellen hervortrat.

Allgemein ergibt sich also, daß von nahe aneinander stehenden Lichtpunkten der schwächere die stärkste Gestaltänderung zeigt (er scheint an den hellen hingedrückt) und daß das Distanzmessungsresultat gegenüber der Wirklichkeit das Bild der schwachen Komponente als von der hellen abgestoßen zeigt.

Sucht man in der Beobachtungsliteratur nach Bestätigungen für diese Ergebnisse, so wird man zunächst an die Ausmessung künstlicher Doppelsterne von O. Struve (XXI § 4) denken — allein jenes Material läßt sich leider für diese Frage nicht gut verwenden, weil diese Erscheinung durch die sehr ausgeprägten und mit der Distanz wachsenden persönlichen Fehler O. Struves völlig verdeckt wird. Aus demselben Grunde geben auch die von O. Struve (XXI § 10) durchgeführten Vergleiche mit den Distanzmessungen anderer Astronomen ein mutmaßlich unsicheres, wenigstens nicht ohne besondere Reduktionen brauchbares Material. Dagegen scheint die von Dembowski (XXI, 141) durchgeführte Vergleichung seiner eigenen Distanzmessungen an Doppelsternen mit denen von W. Struve (Σ) ein ausgezeichnetes Prüfobjekt, weil die Distanzmessungen Dembowskis und W. Struves jene systematischen Fehler nachweisbar nur in sehr geringem Grade aufweisen (XXII), daher auch wie folgende Tabelle zeigt, in Messung größerer Distanzen völlig übereinstimmen.

Die einzige größere Differenz für die Distanz o″,76 besagt, daß Dembowski hier die Distanzen um o″,127 größer gemessen hat als W. Struve. Struve beobachtete am großen Dorpater Refraktor von 12 Zoll Öffnung, während Dembowski die Beobachtungen mit einem Merzschen 7,4 zölligen Refraktor machte. Die Distanz o″,76 entspricht am Dorpater Refraktor der Entfernung $u_D = 7{,}6$, am 7′,4 Refraktor

Tabelle XVII.

Vergleich der Doppelsterndistanzen von W. Struve (Σ) und Dembowski (Δ).

Mittel-Dist.	$(\Sigma - \Delta)$	Kontrast-korrektur	$(\Sigma - \Delta)'$
″	″	″	″
0,76	— 0,127	+ 0,156	+ 0,029
1,58	+ 0,030	—	30
3,16	+ 12	—	12
6,32	+ 9	—	9
10,20	+ 19	—	19
14,14	+ 9	—	9
20,42	+ 4	—	4
28,29	+ 6	—	6

dagegen der Entfernung $u_M = 3{,}9$, d. h. am Merz-Refraktor gerade der durch Fig. 9 dargestellten Lage beider Komponenten, während beim Dorpater Refraktor die beiden zentralen Beugungsscheiben der Komponenten gerade eben getrennt sind, also keine größere Störung der Bildgestalt mehr zu erwarten ist. Aus der Kontrasttheorie muß demnach gefolgert werden, daß die Dembowskische Messung der Distanz um **0,8 o. E.**, d. h. um o″,159 zu groß ausfällt. Bringt man diese Korrektur an die Differenz $\Sigma - \Delta$ an, so verwandelt sich der Betrag in + o″,029, d. h. da die nächstfolgende Distanz 1″,58 auch für den Merz-Refraktor schon ungestört bleibt, daß eine überaschend gute Einfügung des ersten in die übrigen Werte erzielt worden ist, wie die dritte Spalte obiger Tabelle zeigt. Man entnimmt hieraus außer der Bestätigung der Kontrasttheorie einen weiteren Beweis für die erstaunliche Genauigkeit der Doppelsternmessungen Dembowkis an seinem verhältnismäßig kleinen Instrument (XXII, 224). Wenn man nach diesem Ergebnis nun die graphischen Darstellungen der persönlichen Fehler verschiedener Beobachter in den Distanzen überblickt, die Struve (XXI, Tafel 3 und 4) mitteilt, so wird augenscheinlich, daß der allen Kurven gemeinsame absteigende Ast bei sehr kleinen Distanzen auf dieselben Ursachen zurückgeht und durch entsprechende Reduktionen eliminiert werden kann. Es ist anzunehmen, daß durch diese Reduktionen eine merklich bessere Darstellung von Doppelsternbahnen in der Nähe des scheinbaren Periastron zu erzielen ist.

Wenn die Schwärzung photographischer Platten streng der Intensität und der Expositionszeit proportional wäre, so müßten sich beim Ausmessen photographischer Sternbilder ganz ähnliche Erscheinungen herausstellen wie bei den visuellen Beobachtungen. Da jene Proportionalität indessen nur innerhalb beschränkter Grenzen besteht, bedarf die Bildgestalt des pho-

tographischen Lichtpunktes besonderer Untersuchung. Denkt man sich die Schwärzung der photographischen Platte für eine bestimmte Intensität als Funktion der Expositionszeit dargestellt, so erhält man bekanntlich eine eigenartig oszillierende Kurve, von der für gewöhnliche Zwecke und besonders für photometrische Messungen (XXXIII) nur der mittlere ziemlich geradlinig verlaufende Teil des ersten Anstiegs benutzt wird, während für photographische Himmelsaufnahmen mit ihren an Intensität stark variierenden Objekten auch die Wirkungen des ferneren Verlaufs in Erscheinung treten (XXIV, 211). Die Schwärzung im Bilde eines hellen und bei langer Exposition bedeutend überexponierten Sterns ist infolge dieser verwickelten Verhältnisse quantitativ bisher überhaupt nicht darstellbar, selbst ein qualitativer Überblick bietet manche Schwierigkeiten, wie die Darstellungen Scheiners (XXIV) zeigen. Man geht dafür am besten von der mittleren Intensitätsverteilung aus, welche während der Aufnahme über der Bildstelle ruht. Der Hauptteil derselben besteht in der mittleren Intensitätsverteilung des infolge der unvermeidlichen Luftunruhe ständig hin und her zitternden Beugungsbildes — er hat also ganz ähnliche Gestalt wie die Intensitätsverteilung einer kleinen Lichtscheibe. Daneben kommt jene schwache und für visuelle Beobachtungen unmerkliche Intensitätsüberlagerung in Betracht, welche das durch kleine optische Fehler und Unreinlichkeiten des Objektivs zerstreute Licht hervorruft. Sie verändert den Verlauf der Intensität im Mittelbilde unmerkbar, schafft aber in größeren radialen Entfernungen einen merklich langsameren asymptotischen Lichtabfall als er ohnedies bestehen würde; sie ist es daher hauptsächlich, die den der Expositionszeit folgenden Zuwachs der photographischen Sterndurchmesser verursacht (XXIV, 225). Wird nun die Exposition der Platte unter dieser mittleren Intensitätsverteilung solange fortgesetzt bis etwa diese schwachen Intensitäten die maximale Schwärzung hervorrufen, so wird die stärkere Intensität des Mittelbildes fast dieselbe Schwärzung verursachen, vielleicht im Zentrum schon die ersten Spuren der Wiederaufhellung (Solarisation) zeigen. Das überexponierte Sternbild selbst wird also auf der Platte bestehen aus einer nahezu gleichmäßig tiefschwarzen Mittelscheibe, die entsprechend dem Verlauf des zerstreuten Lichtes nach außen ziemlich langsam zur Helligkeit des Plattengrundes ansteigt; das Schwärzungsbild würde also der Umkehr eines radial stark gedehnten Beugungsbildes des Lichtpunktes ähnlich werden, während ein entsprechend schwächerer gleichzeitig aufgenommener Stern ein Schwärzungsbild hervorruft, das ziemlich genau der Umkehrung der mittleren Intensitätskurve entspricht (vgl. dazu auch XXIV, 213 Fig. 47).

Um die qualitativen Folgerungen aus dem Kontrastgesetz zu ermitteln, sei die photographische Aufnahme eines Doppelsterns, mit derartig ungleichen Komponenten angenommen daß der Schwärzungsverlauf im Bilde der schwachen Komponente gerade der Lichtverteilung im Beugungsbild proportional ist, während der der hellen Komponente dem in radialer Ausdehnung vierfach und an Intensität 1,6fach vergrößerten Beugungsbild des Lichtpunktes entsprechen mag. Dann reduziert sich der Wert der Kontrastfunktion an jeder Stelle des Bildes der hellen Komponente auf den zehnten Teil ihres Betrages an der entsprechenden Stelle des

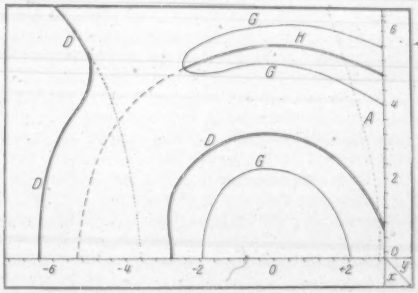

Fig. 11.

Kontrastverlauf im Photogramm eines engen Doppelsterns mit ungleich hellen Komponenten. (Bedeutung der Kurven wie in Fig. 9.)

ungedehnten Bildes, so daß man ihren Verlauf leicht festlegen kann. Nähert man nun die Zentra beider Bilder einander bis auf die Entfernung $u = 15{,}2$ o. E. und ermittelt den Verlauf der resultierenden Kontrastfunktion, so erhält man ein Ergebnis, welches Fig. 11 für die nähere Umgebung der schwachen Komponente darstellt. Die ausgezogenen und gestrichelten Kurven folgen dem Lauf der Kontrastlinien, während die punktierten Kurven den in den dargestellten Bereich fallenden ungestörten Verlauf der Kontrastlinien der hellen Komponente angeben. Man erkennt, daß ihre Form an der schwachen Komponente nur unmerklich verändert ist, während im Bild der hellen Komponente die ganz rechts verlaufende Nullinie (A) völlig unterdrückt wird und die Linie des dem maximalen Dunkelkontrast der Lichtverteilung hier im Schwärzungsbild entsprechenden maximalen Hellkontrastes (DD) eine kräftige Einbuchtung gegenüber dem ungestörten Verlauf erleidet, die auf der Zentrallinie einen

Betrag von 3,2 o. E. erreicht. Um die Hälfte dieses Betrages also um 1,6 o. E. würde bei der gebräuchlichen Mikrometerausmessung die Distanz beider Sterne zu groß gemessen werden, und zwar würde umgekehrt wie bei visueller Beobachtung die helle Komponente um diesen Betrag von der schwachen abgestoßen erscheinen. Es ist unschwer zu ersehen, daß bei noch weiterer Annäherung der Bilder diese Abstoßung noch anwachsen und schließlich fast den Betrag des Radius der schwächeren Komponente erreichen muß.

Die Bestätigung für diese dem Verhalten visueller Doppelsterne direkt entgegengesetzten Folgerungen findet man in der Entdeckung und Untersuchung der „Einwirkung zweier Bilder aufeinander bei astrophotographischen Aufnahmen" durch Kostinsky (XXV). Leider läßt sich — abgesehen von einer nach dem Beispiel Konstinskys ermittelten empirischen Korrektionskurve — keine theoretisch befriedigende Reduktionsmethode zur Ausmerzung dieses Fehlers angeben wie bei visuellen Messungen, weil, wie gesagt, die Schwärzungsverteilung in länger exponierten Sternbildern unbekannt ist, aber eine ebenso einfache wie sichere Methode läßt den Fehler vollkommen ausschließen. Man braucht nämlich nur, wie schon 1911 empfohlen (XXVI), während der Aufnahme zwei rechtwinklig gekreuzte gerade Drähte als „Beugungsgitter" vor dem Fernrohrobjektiv anzubringen, um jeden helleren Stern auf der Platte mit einem durch seinen optischen Mittelpunkt gehenden rechtwinkligen Kreuz zu versehen, auf dessen zarte Striche sich ebenso genau einstellen läßt wie auf das schärfste Sternbild.

Dem Charakter nach sind hier auch die Unterschiede des aus Sternbedeckungen am hellen und dunklen Mondrand berechneten Monddurchmessers zu behandeln. Der starke Dunkelkontrast am hellen Mondrand kann nur geringfügig durch den Hellkontrast des sich nähernden verhältnismäßig lichtschwachen Sternscheibchens geschwächt werden, d. h. das ganze Sternscheibchen wird durch ihn ausgelöscht, sobald es in seinen Bereich gerät. Die Ableitung des Monddurchmessers aus Bedeckungen am hellen Mondrand muß also den geometrischen Durchmesser um die doppelte Breite des Außenkontrastes (7,2 o. E.) vermehren, während Bedeckungen am dunklen Rand genau den wahren Monddurchmesser ergeben müssen. Wenn Airy nach Struve für die Differenz etwa 2″ angibt, so würde daraus auf eine durchschnittliche Objektivöffnung von ca. 140 mm zu schließen sein. Küstner (XXXIII) gibt als Differenz 1″,7 an, was einer Fernrohröffnung von ca. 160 mm entspricht, also einem sehr plausiblen Mittelwert, da in seinem Beobachtungsmaterial die mittlere Instrumentalöffnung auf ca 6 Zoll zu veranschlagen ist.

b) Doppelkeile.

Läßt man zwei helle Sektoren, die mit den Spitzen einander zugekehrt sind, sich einander nähern, so bestehen zwischen den Spitzen nahezu dieselben Bedingungen, welche bei Planeten-

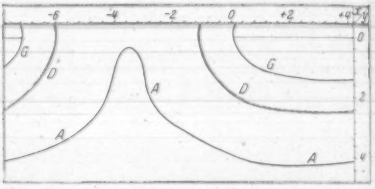

Fig. 12.
Kontrastverlauf zwischen den Spitzen zweier auf 7,2 o. E. genäherten Lichtkeile von 1° Öffnung.

vorübergängen vor der Sonnenscheibe kurz vor der ersten und kurz nach der zweiten inneren Berührung in der Nähe des Berührungspunktes statthaben. Man kann also die Einzelheiten des berühmten „schwarzen Tropfens" auf diese Weise zahlenmäßig verfolgen. In den Fig. 12—15 sind durch Superposition der Kontrastwerte jene Momente dargestellt, in welchen die Spitzen zweier

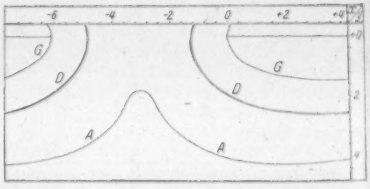

Fig. 13.
Kontrastverlauf zwischen den beiden 1° Keilen bei Annäherung auf 6 o. E.

gleich heller Sektoren von 1 Grad Öffnung einander genähert sind auf Entfernungen von 7,2-6,4 und 0 o. E. Schon bei einem Abstande von 7,2 o. E. hat die erste Phase der Berührung begonnen, da die äußeren Dunkelkontraste in eine beide Bilder umfassende Umrahmung zusammenfließen. Fig. 14 stellt den Moment unmittelbar nach Berührung der Kontrastminima dar; es ergibt sich eine beiden Bildern gemeinsame dunkle Kontrastfurche, der schwarze Tropfen, zwischen den Spitzen. Die weitere Annäherung bringt außer einem unwesentlichen Zurückweichen der Nullgrenze von der Spitze nichts Neues, bis

endlich (Fig. 15) im Moment der geometrisch-optischen Spitzenberührung der Dunkelkontrast zwischen den Bildern verschwindet, d. h. der schwarze Tropfen zerreißt.

Sind die beiden einander genäherten Sektorspitzen von ungleicher Intensität, so treten je nach dem Intensitätsverhältnis wieder mehr oder

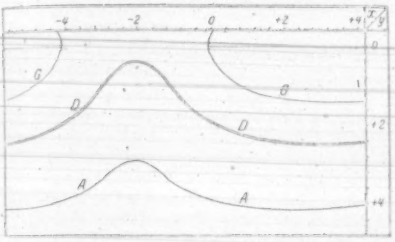

Fig. 14.

Kontrastverlauf zwischen den Lichtkeilen der Fig. 12 u. 13 bei Annäherung auf 4 o. E.

weniger starke Verlagerungen der Begrenzungskontraste der lichtschwächeren Spitze auf. In den Fig. 16 und 17 sind ganz ähnliche tatsächliche Momente dargestellt wie in den Fig 14 und 15, nur mit dem Unterschied, daß der rechts liegenden Sektorspitze nur ein Zehntel der Intensität der linken zuerteilt wurde. Besonders

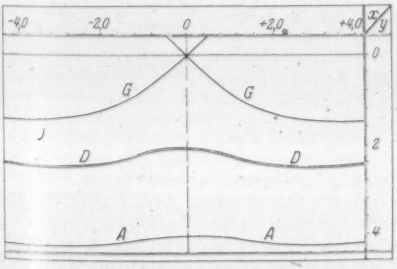

Fig. 15.

Kontrastverlauf zwischen den einander mit den Spitzen berührenden Lichtkeilen der Fig. 12—14.

instruktiv ist der Moment der geometrisch-optischen Berührung (Fig. 17), der die Nullinie des rechten Sektors um 2 o. E. zurückgedrängt zeigt, also noch weit davon entfernt ist, als visuelle Berührung aufgefaßt zu werden. Diese würde erst beobachtet werden können, wenn die Spitzen sich mindestens bereits um 1,6 o. E. überdecken. Während visuell also wieder die lichtschwächere Komponente abgestoßen erscheint, läßt sich in ähnlicher Weise wie oben zeigen, daß bei photographischer Aufnahme dagegen die lichtstärkere Komponente abgestoßen sein wird.

Will man nun die Darstellung der gleich hellen Sektoren zum Vergleich für die Berührungsmomente bei einem Planetendurchgang vor der Sonnenscheibe heranziehen, so ergibt sich folgendes:

Verfolgt man die zur zweiten inneren Berührung schreitende dunkle Planetenscheibe in

Fig. 16.

Kontrastverlauf zwischen zwei 1° Lichtkeilen vom Intensitätsverhältnis 1 : 10 bei Annäherung der Spitzen auf 2 o. E.

ihrer Annäherung an den Sonnenrand, so wird bald die schmalste Stelle des Lichtbandes zwischen beiden Rändern die Breite 4,7 o. E. erreichen. Von diesem Moment an hört, nach S. 11 hier beginnend, das Lichtband auf als „Streifen" zu erscheinen; es nimmt den Charakter eines „Linienelements" an (ein Hellkontrast-Maximum über der Bildmitte), das nun nach beiden Seiten an Länge langsam wächst, während seine subjektive Bildbreite (vgl. Kurve G in Fig. 8 unterhalb der Ordinate 4,7 o. E.) konstant bleibt und

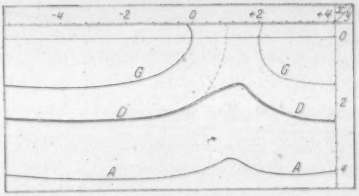

Fig. 17.

Kontrastverlauf zwischen den Keilspitzen der Fig. 16 bei geom.-opt. Spitzenberührung.

das tatsächliche Abnehmen seiner Intensität durch vermehrte Kontrastwirkung zunächst fast ganz ausgeglichen wird. So kann der wirkliche Beginn der Randerscheinungen nicht gut an dem Helligkeitsabfall beobachtet werden, wohl aber scheint, daß der Entstehungsmoment des Lichtlinienelementes als erste Phase ziemlich gut angebbar wäre, wenn ein Beobachter darauf geschult wird.

Bei Fortsetzung der Annäherung des Planetenrandes an den Sonnenrand wird natürlich auch

eine „Trübung" der Lichtlinie subjektiv merkbar werden, aber es gibt keine Möglichkeit, den „Beginn der Trübung" an einen bestimmten Zustand der Annäherung zu knüpfen.

Je mehr aber nun die eigentliche geometrische Randberührung herannaht, um so mehr erhält die Nähe der Berührungsstelle die Form zweier mit der Spitze zusammenstoßender Lichtkeile. Man wird daher die Erscheinung gut erfassen, wenn man auch hier wieder die in Fig. 8 eingetragenen Modifikationen der Kontraststreifen ins Auge faßt. Denkt man sich die Randentfernung auf 1,5 o. E. herabgesunken, so herrscht an der Berührungsstelle ein relativer Maximalkontrast — weitere Randnäherung zertrennt dies Maximum in zwei, deren jedes zu einer Stelle, an der die beiden Lichtkeile momentan 1,5 o. E. breit sind, seitlich abwandert. Hierbei wird die Trübung zwischen ihnen an der Berührungsstelle fast plötzlich auffallend kräftig, so daß hier ein zweites gutes Beobachtungsmoment erscheint.

Im Augenblick der wirklichen geometrischen Randberührung berühren sich die geometrischen Keilspitzen. Die Intensität an der Berührungsstelle ist sehr gering, die hier zusammenfallenden Nullkontrastkurven G legen zwischen die beiden, bei den Keilbreiten 1,5 o. E. liegenden Hellkontrast-Maxima (o in Fig. 8), welche subjektiv jetzt fast plötzlich als die eigentlichen Keilspitzen erscheinen, scheinbar ebenso plötzlich eine auffällige schwarze Brücke (Fig. 15). Dieser Moment als Beginn der „Tropfenbildung" gibt daher eine dritte Beobachtungsnotiz für die Erscheinung. Der weitere Verlauf bietet für das Vorliegende kein Interesse.

Struve zittiert nach Auwers Modellbeobachtungen obiger Erscheinung mit einem Fernrohr von 117 mm Öffnung bei 111facher Vergrößerung. Da die Fernrohr-Austrittspupille hierbei $p = \frac{117}{171} = 0{,}68$ mm betrug, so darf nach S. 21 noch keine sonderlich genaue Erfassung der Erscheinung erwartet werden. Es fand sich:

a) schwache Trübung
Randabstand $-0'',77 = -2{,}34$ o. E.
b) sehr merkliche Trübung
Randabstand $-0'',52 = -1{,}58$ o. E.
c) sehr starke Trübung
Randabstand $-0'',17 = -0{,}52$ o. E.
d) Tropfenbildung
Randabstand $-0'',06 = -0{,}18$ o. E.
e) Tropfen sehr dick
Randabstand $-0'',07 = +0{,}31$ o. E.

Im Vergleich dazu folgt aus der Kontrastbetrachtung:

o) Entstehung des „Linienelements"
Randabstand $-4{,}7$ o. E.
b) sehr merkliche Trübung
Randabstand $-1{,}5$ o. E.
d) Tropfenbildung Randabstand 0,0 o. E.

Der Moment o) ist nicht beobachtet worden. Die Momente a), c), e) können nicht identifiziert werden; dagegen passen die Momente b) und d) sehr gut zu den betreffenden Kontrastmomenten. Da für das benutzte Instrument eine optische Einheit $= 0'',330$ ist, so hätte man allein durch Kontrastreduktion der Momente b) und d) die Berührung nur noch um $\frac{0{,}08 + 0{,}18}{2}$ o. E. $= 0'',043$ zu früh registriert, also immerhin ein sehr brauchbares Resultat erhalten. Dabei ist nach der Betrachtung über hinreichende Vergrößerung die Vermutung zulässig, daß eine stärkere Okularvergrößerung von $\Gamma \geq 200$ die Genauigkeit noch hätte etwas erhöhen können.

4. Messung mit Doppelbildmikrometer.

Denkt man bei Doppelbildmikrometern zunächst an Messung kreisförmiger Bilder, so heben sich bei geometrischer Berührung, wie Fig. 15 zeigt, die Grenzkontraste längs einer Geraden senkrecht zu den sich berührenden Bildlinien auf, denn der Zwischenraum zwischen beiden Bildern beiderseits dieser Linie stellt sich als zwei dunkle (bei weißen Bildern) oder helle (bei dunklen Bildern) Keile dar, die mit ihren Spitzen zusammenstoßen. Man erkennt sofort, daß die Bildgrenze (die Kurve G) sich von dem Berührungspunkt, wie oben erwähnt, zunächst längs eines kurzen Stücks senkrecht zu den geometrischen Konturen bewegt und sich dann in zwei Züge gabelt, die in einem Abstand von $2 \cdot 1{,}4 = 2.8$ o. E. voneinander verlaufend, bei einer Keilbreite von 5 o. E. in die geometrischen Grenzen der beiden Bilder übergehen d. h. also: im Moment der geometrisch-optischen Bildberührung scheinen dem Beobachter die Bilder noch um 2,8 o. E. auseinanderzustehen, wiewohl er schon eine deutliche Trübung (bei dunklen Bildern) oder eine deutliche Aufhellung (bei hellen Bildern), den berüchtigten „Tropfen", an der trennenden Brücke bemerkt.

Führt der Beobachter die Bilder nach dem eben erreichten Zustand seiner Meinung nach noch mehr zusammen, so überdeckt er sie unwissentlich und erhält, sofern man wieder an kreisförmige Objekte denkt, einen lanzettförmigen Überdeckungsraum, der sich dunkel bei dunklen Bildern, hell bei hellen Bildern zwischen die auseinanderweichenden Keilspitzen lagert und über seiner Mitte (s. S. 17) einen dunklen, bzw. hellen Kontraststreifen hat, der bei einer Breite des lanzettförmigen Flächenstücks von 1,5 o. E. (s. den kleinen Kreis auf der Ordinatenachse

von Fig. 8) an der Berührungsstelle besonders deutlich wird und daher gut eine gemeinsame Bildgrenze beider Einzelbilder vortäuschen kann.

Noch weiteres Überdecken führt bei einer Breite des lanzettförmigen Flächenstücks von 4,7 o. E. (S. 17) zur Spaltung des eben erwähnten Kontraststreifens und wird damit für den Beobachter subjektiv den Eindruck erwecken, als fange jetzt gerade die Überdeckung an, als sei also gerade jetzt eben die geometrische Bildberührung eingetreten.

Es ist a priori nicht zu sagen, wie sich ein Beobachter den hier vorliegenden Komplikationen gegenüber verhält — er kann z. B., die Breite der „trüben Brücke" schätzend, um dieses Stück die Bilder überdecken, oder er kann die Bilder einander nähern, bis er im Berührungspunkt die vermeintlich gemeinsame Grenze bemerkt, oder er kann subjektiv den Beginn der Überdeckung erwarten. Im zweiten Fall wird er die Bilddurchmesser um 1,5 o. E., im ersten um 2,8 o. E. und im dritten um 4,7 o. E. zu klein erhalten.

Hartwig (XXXI) hat Heliometermessungen des Venusdurchmessers von Main, Kaiser und sich selbst unter Einführung eines unbekannten konstanten Meßfehlers für jedes Instrument ausgeglichen und fand für den Fehler folgende Werte:

Oxforder Heliometer (Main)	$-1''{,}18$	$-4{,}1$ o. E.
Straßburger Heliometer (Hartwig)	$-1''{,}23$	$-1{,}8$ „ „
Straßburger Heliometer (Hartwig)	$-0''{,}93$	$-3{,}1$ „ „
Airys Doppelbildmikrometer (Kaiser)	$-0''{,}77$	$-2{,}7$ „ „

Nimmt man jeweils als beugende Öffnung ein Ersatzobjektiv von der halben Öffnungsfläche der Heliometer (vgl. dazu das nächste Beispiel) an, so entsprechen die Fehler den in der dritten Spalte angeführten Werten in o. E., d. h. die Durchmesser sind tatsächlich um solche Beträge und in denselben Stufen zu klein erhalten, wie sie oben für diesen Fall angegeben wurden. Das Hartwigsche Ergebnis für den Venusdurchmesser $2r = 17''{,}666$ darf man infolge dieser Ausgleichung als den wegen Kontrastfehlers reduzierten wahren Wert ansprechen.

Es scheint nun, daß geübte Beobachter immer mehr zur Einstellung auf den Moment der subjektiv beginnenden Überdeckung, also Durchmesservergrößerung um 4,7 o. E. hinneigen, denn Auwers (III S. 85 u. XXXV) leitete aus den Heliometerbeobachtungen des Venusdurchgangs von 1874 den Durchmesserwert $16''{,}820$ ab.

Für Abschätzung der Beugungswirkung der Objektivhälften auf jedes Einzelbild ersetzen wir jede durch eine kreisförmige Objektivöffnung von halber Fläche des ganzen Heliometerobjektivs. Da die benutzten Heliometer eine volle Öffnung von 76 mm besaßen, so wäre die Öffnung des jede Hälfte vertretenden „Ersatzobjektivs" zu $38 \cdot \sqrt{2} = 53{,}74$ mm anzunehmen. Durchschnittlich wurde bei 150facher Okularvergrößerung beobachtet; die Ersatz-Austrittspupille für jede Objektivhälfte maß daher $p = \frac{53{,}74}{150} = 0{,}358$ mm, war also hinreichend klein. Aus der zur „Bildberührung" beider Einzelbilder vorgenommenen Überdeckung um 4,7 o. E. würde nach Gl. (6a) (für das Ersatzobjektiv ist $\Gamma_0 = \frac{53{,}74}{5} = 10{,}75$) ein Mikrometerbetrag von $\beta'' = 7''{,}7 \cdot \frac{4{,}7}{10{,}75} = 3''{,}367$ folgen. Hiervon mußte bei der Reduktion auf Entfernungseinheit (Erde — Venus in unterer Konjunktion = 0,28) der Betrag: $2\,dr = 0{,}28 \cdot 3''{,}367 = 0''{,}943$ ins Resultat eingehen. Der wahre Durchmesser beträgt daher $16''{,}820 + 0''{,}943 = 17''{,}763$, während der Hartwigsche Wert $17''{,}666$ und der Struvesche $17''{,}698$ war. Die Mißstimmigkeit wird also hiermit beseitigt.

Ein interessantes hierher gehöriges Beispiel besonderer Art ist das folgende: Nach Auwers (XXXV S. 724) wurde bei Gelegenheit des Venusdurchgangs von 1874 in Bahia blanca und Punta Arenas eine Durchmessermessung an der schmalen Venussichel eben außerhalb der Sonnenscheibe ausgeführt; es ergab sich der Wert $17''{,}31$. Zweifelsohne erwartet der Beobachter in solchem Fall die Berührung der sehr feinen Sichelspitzen daran erkennen zu können, daß die nebeneinander gelegten Bilder eine gemeinsame Spitze zeigen. Das ist nach Fig. 8 aber nur dann möglich, wenn die Spitzen so überdeckt werden, daß die Hellkontrast-Maxima bei der Sichelbreite 1,5 o. E. zusammenfallen, woraus eine Durchmesserverringerung von gleichem Betrag resultiert. Da die Instrumente dieselben waren wie oben und sich auch die Entfernung Erde — Venus nicht geändert hatte, mußte ins Resultat eingehen der Betrag: $2\,dr = \frac{7''{,}7 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}28}{10{,}75} = 0''{,}301$. Der wahre Durchmesserwert beträgt daher $17''{,}31 + 0''{,}301 = 17''{,}61$, d. h., es wird wieder nahezu der Hartwigsche Wert erreicht. Wenn man bedenkt, welche Meßschwierigkeiten so nahe der Sonnenscheibe vorliegen, so muß dies Ergebnis ganz besonders befriedigen.

IV. Schluß.

Die Untersuchung hat unter Voraussetzung hinreichender Vergrößerung die allgemeine Regel erwiesen:

An alleinstehenden und kombinierten Bildern sieht das Auge eine gut definierte Grenze dort, wo eine zwischen beiden Randkontrasten liegende kontrastfreie Zone ($\Delta i = 0$) an den Dunkelkontraststreifen angrenzt.

Die Kontrastlage an kombinierten Bildern erhält man mit genügender Annäherung durch einfache Superposition der erhaltenen Kontrastlagen der Einzelbilder. Die relative Stärke der Kontrastextreme ist der relativen Stärke der den Kontrast verursachenden Bildintensität proportional — bei sehr schmalen Bildern sind evtl. noch die Sonderbemerkungen über relative Kontraststärke S. 17 u. f. zu beachten.

Damit ist man einerseits in der Definition der physiologischen Bildgrenze der mühseligen Untersuchung des Intensitätsverlaufs im einzelnen enthoben, andererseits gewinnt man mit einem Schlage einen charakterisierenden und für numerische Auswertung hinreichenden Einblick in die bei verschiedenen Meßmethoden auftretenden Fehler.

Wenn man, um schematische Verhältnisse zu schaffen, bei irgendeiner Meßmethode unterscheidet: an der zu messenden Fläche die Intensitäten weiß oder schwarz, bei dem zur Messung dienenden Meßbild (Faden, Doppelbild oder dgl.) die Intensitäten weiß oder schwarz, und für den Untergrund eine zwischen beiden stehende Intensität als grau bezeichnet, so sind folgende 8 Fälle denkbar:

Intensität des Meßbildes	Meßbild wird bewegt auf	Meßbild wird bewegt in Richtung gegen Rand von
a) weiß	grauem Grund	weißer Fläche
b) schwarz	grauem Grund	schwarzer Fläche
c) schwarz	weißer Fläche	grauem Grund
d) weiß	schwarzer Fläche	grauem Grund
e) schwarz	grauem Grund	weißer Fläche
f) weiß	grauem Grund	schwarzer Fläche
g) weiß	weißer Fläche	grauem Grund
h) schwarz	schwarzer Fläche	grauem Grund

Die Fälle a), b), e), f) würde man in üblicher Bezeichnungsweise als Messung durch Außenberührung, die Fälle c), d), g), h) als Messung durch Innenberührung zusammenfassen. Die Fälle e), f), g), h) ergeben an oder nahe der Berührungsstelle eine einfache, beiden Bildern gemeinsame Grenzkurve $\Delta i = 0$, die Fälle a), b), c), d) geben nahe dem Berührungsmoment eine Verzweigung der Grenzkurve $\Delta i = 0$, die das äußere Zeichen von verwickelten Phänomenen ist, die man in einem typischen Fall als „Tropfenbildung" bezeichnet.

In der Charakterisierung der Lage der Bildgrenze in verschiedenen Fällen beginnen wir mit der gesehenen Bildgrenze am gleichförmig hellen oder dunklen Einzelbild. Sie ist nach der oben angegebenen Regel durch die Stelle G in Fig. 8 gegeben, fällt also bei Bildern, deren randsenkrechter Durchmesser größer ist als 5 o. E., mit der geometrisch-optischen Bildgrenze zusammen; bei schmäleren Bildern rückt sie mehr und mehr bis zum Betrage 1,4 o. E. vom geometrischen Bildrand nach außen. Sehr schmale Bilder erscheinen also in ihrem Durchmesser um den doppelten Betrag dieser Verschiebung verbreitert. Solche Verbreiterung an hellen Bildern wird als positive, an dunklen Bildern als negative Irradiation bezeichnet.

Die gemessene Bildgrenze ist im allgemeinen von der am Einzelbild gesehenen Grenze verschieden.

Denkt man sich in den Fällen e) und f) der Meßmöglichkeiten der leichteren Übersicht wegen das zu messende und das Meßbild von größerem Durchmesser als 5 o. E., so hat das helle Bild nach Fig. 8 außen einen „Dunkelgraben", das dunkle Bild außen einen „Hellwall" von derselben Höhe wie die Grabentiefe, weil die verursachenden relativen Intensitäten nahe der Berührung gleich sind. (Für künstliche Feldbeleuchtung gelten die besonderen Überlegungen von S. 20 und 24). Kurz vor der geometrischen Randberührung, wenn die beiden Bilder den Abstand der Stellen G und A der Fig. 8 haben, heben sich hier beide Außenkontraste zu einer Strecke $\Delta i = 0$ auf. Längs dieser kontrastfreien Strecke von 3,6 o. E. Länge wird jetzt die tatsächliche Intensität i empfunden, wo vorher Dunkelkontrast herrschte; m. a. W., der Rand des hellen Bildes scheint an der Berührungsstelle um den Betrag 3,6 o. E. gegen den Rand des schwarzen Bildes hingerückt. In den beiden genannten Fällen wird also an hellen und dunklen Bildern der Durchmesser um $2 \cdot 3{,}6$ o. E. zu groß gemessen.

In den Fällen g) und h) stellt das Meßbild — soweit es sich innerhalb der zu messenden Bildfläche befindet — einen nicht oder kaum mehr unterscheidbaren Teil dieser selbst dar, soweit es außerhalb ist, zeigt es an seinem Außenrand dieselben Dunkel- bzw. Hellkontraste wie das zu messende Bild — im Moment der Innenberührung haben Meßbild und zu messendes Bild an der Berührungsstelle eine Stelle ihres Außenkontrastes gemeinsam; es findet also eine geometrische Berührung ihrer unveränderten Grenzen G nach Fig. 8 statt; d. h. bei Bildbreiten über 5 o. E. ergeben diese beiden Fälle die wahren geometrischen Bilddurchmesser. Abgesehen ist hier natürlich von der rein tech-

nischen Frage, ob man bei dieser Methode das zu messende Bild genügend ruhig im Gesichtsfeld erhalten kann.

In den Fällen a) und b) heben sich bei geometrischer Berührung die Grenzkontraste längs einer Geraden senkrecht zu den sich berührenden Bildlinien auf. Der Zwischenraum zwischen beiden Bildern beiderseits dieser Linie — wenn man sich die zu messende Fläche etwa von Kreisform denkt — stellt sich als zwei dunkle (bei weißen Bildern) oder helle (bei dunklen Bildern) Keile dar, die mit ihren Spitzen zusammenstoßen. Die Untersuchung des Kontrastverlaufes führt auf die komplizierten Begleiterscheinungen des berüchtigten „schwarzen (oder hellen) Tropfens" und charakterisiert diese Meßarten als mit unberechenbaren subjektiven Zufälligkeiten behaftet. Doppelbildmikrometermessungen können daher für Präzisionsmessung nicht empfohlen werden.

Im ganzen darf somit der Überzeugung Ausdruck gegeben werden, daß die Kontrasttheorie ein wesentliches Hindernis gegen Erhöhung der Genauigkeit von Präzisionsmessungen beseitigt.

Quellenverzeichnis.

I. E. Hering, Grundzüge der Lehre vom Lichtsinn. Berlin 1920.

II. F. B. Hofmann, Die Lehre vom Raumsinn des Auges. Berlin 1920.

III. W. Struve, Über den Einfluß der Diffraktion an Fernrohren auf Lichtscheiben. St. Petersburg 1882.

IV. K. Strehl, Theorie des Fernrohrs. Leipzig 1894.

V. E. Mach, Analyse der Empfindungen. 2. Aufl. Jena 1900.

VI. H. v. Seeliger, Die scheinbare Vergrößerung des Erdschattens bei Mondfinsternissen. München, K. B. Akad. d. W. 1896.

VII. E. Mach, Über die Wirkung der räumlichen Verteilung des Lichtreizes auf die Netzhaut. a) Sitzgsber. d. Akad. d. W. Wien 1865, Bd. 52, II. Abt., S. 303 u. f.; b) 1866, Bd. 54, II. Abt., S. 131 u. f.; c) 1866, Bd. 54, II. Abt., S. 400 u. f.; 1868, Bd. 57, II. Abt., S. 11 u. f.

VIII. A. Kühl, Über die Leistungsgrenzen und Empfindungsstärke unseres Sehorgans bei Abbildung von Fixsternen und Planeten mit und ohne Fernrohr. Diss. München 1909.

IX. A. Kühl, Zur Bedeutung des Mach-Seeligerschen Kriteriums für Licht- und Schattengrenzen. Sirius 1919, Heft 9 u. 10.

X. Kühl, Physiologisch-optische Bildbegrenzung. Zeitschr. f. ophthalmolog. Optik 1920, Heft 5.

XI. Helmholtz, Handbuch der physiol. Optik. 3. Aufl. 2. Bd. Hamburg und Leipzig 1911.

XII. A. Kühl, Eine Erweiterung des Riccoschen Satzes. Zeitschr. f. Biologie Bd. 60, S. 481 u. f.

XIII. A. Kühl, Das Fernrohr und die scheinbare Helligkeit der Sterne. Sirius 1918, Heft 6 b, 9.

XIV. A. Pütter, Organologie des Auges. 3. Aufl. Leipzig 1912.

XV. Bloom u. Garten, Vergleichende Untersuchung der Sehschärfe des hell und dunkel adaptierten Auges. Archiv f. d. ges. Physiol., Bd. 72, S. 385.

XVI. K. Strehl, Die Berechnung der Beugungsbilder. Programm d. Gymnas. Erlangen 1898.

XVII. Schwerdt, Die Beugungserscheinungen aus den Fundamenten der Undulationstheorie analytisch entwickelt und in Bildern dargestellt. Mannheim 1836, Tab. III.

XVIII. H. Nagaoka, Diffraction Phenomena in the Foval Plane of a Telescope with Circular Aperture due to a Finite Source of Light. Tokyo Journ. Sc. Coll. Vol. IX, S. 321.

XIX. K. Strehl, Beugungsbilder und deren Messung. Zeitschr. f. Instr.-Kunde 1896, S. 257.

XX. K. Exner u. W. Villiger, Über das Newtonsche Phänomen der Szintillation. Sitzgsber. d. Wiener Akad. 1902, S. 1264 u. 1904, S. 1019.

XXI. O. Struve, Observations de Poulkova. Vol. IX. Petersburg 1878.

XXII. Schur, Referat über: Dembowski, Misure micrometriche de stelle doppie. Vierteljahrsschr. d. Astr. Gesell., Leipzig 1887, S. 223.

XXIII. K. Schwarzschild, Bestimmung der Sternhelligkeit aus extrafokalen Aufnahmen. Publ. v. d. Kufnerschen Sternw. Wien, Bd. V.

XXIV. Scheiner, Photographie der Gestirne. Leipzig 1897.

XXV. Kostinsky, Über die Einwirkung zweier Bilder aufeinander bei astrophotographischen Aufnahmen. Mitt. d. Nicolai-Hauptsternw. z. Pulkowa 1907, Bd. 2, Nr. 14.

XXVI. A. Kühl, Zur Erhöhung der Einstellungsgenauigkeit auf überexponierte Sternbilder. Astr. Nachr., Bd. 189, Nr. 4531.

XXVII. Aubert, Physiologie der Netzhaut. Breslau 1855.

XXVIII. Helmholtz, Physiologische Optik. 3. Aufl. Leipzig 1909, Bd. 1.

XXIX. K. Strehl, Scheinbarer Durchmesser und Helligkeit des Fixsternbildes. Astr. Nachr. 1913, Bd. 193, S. 389.

XXX. O. Lohse, Planetographie. Leipzig 1894.

XXXI. O. Hartwig, Untersuchungen über die Durchmesser der Planeten Venus und Mars. Publ. d. Astr. Ges. XV, Leipzig 1879.

XXXII. L. Courvoisier, Aufforderung zu Meridianbeobachtungen des Planeten Venus in der Nähe seiner unteren Konjunktion. Astr. Nachr. 1919, Bd. 208, S. 168.

XXXIII. E. Großmann, Die Bewegung des Merkurperihels nach den Arbeiten Newcombs. Astr. Nachr. 1921, Bd. 214, S. 41.

XXXIV. Küstner, Bestimmung des Monddurchmessers aus 9 Plejadenbedeckungen. Diss., Halle 1880.

XXXV. Auwers, Die Venusdurchgänge von 1874 und 1882. Berlin 1898, Bd. 5.

XXXVI. Kühl, Anwendung der Kontrasttheorie auf das Fadenmikrometer. Zentralz. f. Opt. u. Mech. 1924, S. 27 u. f.

XXXVII. Kühl, Die Reduktion von Fernrohrbeobachtungen wegen Kontrastfehlers in: „Probleme der Astronomie". Festschrift für H. v. Seeliger. Berlin 1924.

(Eingegangen 25. August 1927.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die Theorie der diskontinuierlichen Flüssigkeitsbewegungen und die Wirklichkeit.

Von F. Ahlborn.

1. Die Diskontinuitätstheorie.

In seiner viel erörterten Arbeit über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen hat Helmholtz darauf hingewiesen, daß die aus den hydrodynamischen Gleichungen abgeleiteten Ergebnisse der Theorie den Physikern doch nur als eine praktisch sehr unvollkommene Annäherung an die Wirklichkeit erscheinen müßten, da in vielen Fällen die Vorgänge in den tropfbaren Flüssigkeiten sehr weitgehend von den theoretischen Strömungen abweichen, die sich wie Elektrizität bewegen.

Als ein auffallendes Beispiel hierfür bezeichnet Helmholtz die Strahlbildung von Wasser und Luft beim Austritt aus Öffnungen mit scharfen Rändern, wo die theoretischen Stromlinien sogleich nach allen Richtungen auseinander weichen. Austretender Rauch bildet scharf begrenzte Fäden, die sich in wechselnden Entfernungen in Wirbel auflösen, während die umgebende Flüssigkeit außerhalb des Strahles fast vollständig in Ruhe bleibt. Im Wasser zeigen sich mit geringen Abweichungen dieselben Bewegungsformen wie in der Luft.

Ein weiteres Beispiel bilden die sehr merkwürdigen periodischen Bewegungen in Orgelpfeifen, die durch einen kontinuierlichen Luftstrom erzeugt werden. Man kann wohl, bemerkt Helmholtz, die Ursache dieser mancherlei abweichenden Erscheinungen in der Reibung vermuten, aber die seltsamen und sprungweisen Änderungen sind auch durch die jedenfalls stetig und gleichmäßig wirkende Reibung nicht zu erklären. Solche Wirkungen können nur durch eine diskontinuierliche Luftströmung hervorgebracht werden, bei der zwei dicht aneinander liegende Schichten mit endlicher Geschwindigkeit aneinander entlanggleiten.

Wenn die Rauchfäden und Wasserstrahlen, wie es den Anschein hat, von einer schlauchförmigen Grenzfläche umschlossen sind, die sie von der umgebenden ruhenden Flüssigkeit trennt, so ist damit das Vorkommen von Diskontinuitätsflächen erwiesen. Aber bei der Schwierigkeit der direkten Beobachtung bleibt es immerhin eine Annahme, die wir weiterhin mit den Hilfsmitteln der photographischen Strömungsanalyse zu prüfen haben werden.

Weit schwieriger ist zu verstehen, wie in einer kontinuierlichen Flüssigkeit die Diskontinuität der Bewegung zustandekommen soll. Hierüber hat Helmholtz den folgenden Gedankengang entwickelt.

Wenn die tropfbaren Flüssigkeiten kontinuierlich wie Elektrizität fließen sollten, so müßte die Geschwindigkeit an jeder scharfen Kante, um welche der Strom herumbiegt, unendlich groß werden. Von der Geschwindigkeit hängt aber die Größe des Druckes in der Weise ab, daß die Verminderung des Druckes der lebendigen Kraft der bewegten Wasserteilchen direkt proportional ist. Übersteigt also die letztere eine gewisse Größe, so muß der Druck negativ werden und die Flüssigkeit zerreißen. An einer solchen Stelle wird die beschleunigte Kraft, welche dem Differentialquotienten des Druckes proportional ist, offenbar diskontinuierlich, und dadurch die Bedingung erfüllt, welche nötig ist, um eine diskontinuierliche Bewegung der Flüssigkeit hervorzurufen. Die Bewegung an einer solchen Stelle vorüber kann nur so geschehen, daß sich von dort ab eine Trennungsfläche bildet.

Die Geschwindigkeit, welche das Zerreißen der Flüssigkeit herbeiführen muß, ist diejenige, welche die Flüssigkeit annehmen würde, wenn sie unter dem Drucke, den sie am gleichen Orte im ruhenden Zustand hat, in den leeren Raum ausflöße. Dies ist allerdings eine verhältnismäßig bedeutende Geschwindigkeit, sie wird aber an vollkommen scharf ausgebildeten Kanten schon bei der mäßigsten Geschwindigkeit der übrigen Flüssigkeit erreicht, während an abgerundeten Kanten das Zerreißen und die Bildung der Trennungsflächen erst bei gewissen größeren Geschwindigkeiten stattfindet.

Eine Trennungsfläche kann mathematisch als Wirbelfläche behandelt werden, die mit Wir-

belfäden von unendlich geringer Masse, aber endlichem Drehungsmoment kontinuierlich belegt ist. Für die ideale, reibungsfreie Flüssigkeit, in welcher keine Wirbel entstehen können, ist dies nur eine Fiktion, welche die Integration erleichtert. In den wirklichen Flüssigkeiten werden die Grenzteilchen durch Reibung in Rotation versetzt, so daß hier Wirbelfäden von endlicher, allmählich wachsender Masse entstehen und dadurch zugleich die Diskontinuität der Bewegung ausgeglichen wird.

Wir haben es hiernach mit zwei wesentlich verschiedenen Formen der unstetigen Strömung zu tun. In der idealen Flüssigkeit sind die durch Zerreißen entstehenden Kavitationsspalten und Trennungsflächen frei von Rotation. Sie trennen in dem von Kirchhoff eingehend behandelten Falle einer Querplatte (Fig. 1) die

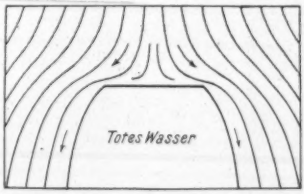

Fig. 1.
Diskontinuierliche Strömung an einer Querplatte nach Kirchhoff. Diskontinuitätsflächen trennen die Strömung von dem toten Wasser hinter der Platte.

von der Vorderseite abfließende Potentialströmung von dem toten Wasser, das sich von der Rückseite der Platte unbegrenzt nach hinten erstreckt. In dem toten Wasser herrscht nur der statische Druck der ungestörten Flüssigkeit.

In einer wirklichen Flüssigkeit entwickelt sich dagegen aus der Kavitationsspalte eine Schicht von Wirbeln endlicher Größe, deren Masse allmählich zunimmt, so daß auch die Flüssigkeit hinter der Platte zunehmend in die umlaufende Bewegung der Wirbel einbezogen wird. Der Vergleich ergibt, daß die ideale Form der diskontinuierlichen Strömung ebenso weit von der Wirklichkeit abweicht, wie die Form mit den Wirbelschichten ihr nahekommt. Die photographische Analyse der natürlichen Strömung zeigt (Fig. 2), daß der Raum hinter der Platte nicht mit totem Wasser, sondern mit Wirbelungen erfüllt ist, die im wesentlichen mit den Wirbelschichten übereinstimmen und räumlich die Form von Wirbelringen haben.

Man könnte die Diskontinuitätstheorie als eine zutreffende Erklärung der natürlichen Vorgänge ansehen, wenn sich nicht doch bei ihrer Anwendung auf Körper von beliebiger Form und auch auf die ideale Flüssigkeit, für die sie zunächst bestimmt ist, Schwierigkeiten herausstellten, die darüber keinen Zweifel lassen, daß die Begründung der Theorie durch die Bildung einer Kavitationsspalte nicht zutreffend sein kann.

Schon Lord Kelvin hat in einer Reihe polemischer Artikel, die in der Nature **50**, 524, 549, 573, 597, 1894 erschienen sind, gewichtige Bedenken und Einwände gegen die Theorie erhoben, die ihn sogar zu der Ansicht gebracht haben, daß die diskontinuierliche Form der Bewegung keine Ähnlichkeit mit dem habe, was in wirklichen Flüssigkeiten geschehe. Er ist der Meinung, daß die Theorie nur auf freie Oberflächen, wie an Strahlen, anwendbar sei.

Fig. 2.
Die wirkliche Umströmung einer Querplatte mit den Wirbelungen.

Der Einwand Lord Kelvins, daß die diskontinuierliche Strömung keine Ähnlichkeit mit den Bewegungen wirklicher Flüssigkeiten habe, weil man hier niemals totes Wasser, sondern lebhafte Wirbelungen an der Rückseite der Körper finde, beruht offenbar auf einem Mißverständnis, da die Theorie, wie oben gezeigt, gerade eine Erklärung für die Entstehung und die Form dieser Wirbelungen gibt, für die in der kontinuierlichen Eulerschen Strömung kein Raum ist.

Schwerer ist der Einwurf, daß das nach hinten unbegrenzte Totwasser eine unendlich große kinetische Energie erfordere, und es ist in der Tat nicht einzusehen, wie z. B. in dem Falle, daß die Querplatte in ruhender Flüssigkeit fortbewegt wird, das „tote Wasser“ ohne Druckver-

lust die Geschwindigkeit der Platte annehmen könnte. Es ist auch nichts damit gewonnen, daß man vermutet, das tote Wasser werde sich erst am Ende eines langen, noch unbekannten Vorganges herausbilden.

Lanchester (Aerodynamik I, §§ 100—104) hat versucht, die Entstehung des toten Wassers in wirklichen Flüssigkeiten durch einen solchen allmählichen Vorgang zu erklären. Er nimmt an, daß die Grenzschichten, welche sich längs der Oberfläche des festen Körpers mit einem Geschwindigkeitsgradienten bewegen, immer von den Orten des höheren zu denen des niederen Druckes fließen, also an der Vorderseite der Querplatte mit der Strömung gegen den Rand an der Rückseite ebenfalls randwärts gegen den Strom. Die Ansammlung dieses Materials lasse dann vom Rande aus allmählich das tote Wasser entstehen.

Das ist dieselbe Annahme, die Prandtl seiner Ablösungstheorie der Grenzschichten zugrunde gelegt hat, bei der aber nicht das tote Wasser, sondern die Helmholtzsche Trennungsfläche und die Wirbel aus dem angesammelten Grenzschichtenmaterial entstehen sollen. Beide Theorien sind hinfällig, da die Grenzschichten nachweislich nicht der Strömung entgegenfließen können, deren Grenzschichten sie sind, also auch keine Ansammlung ihres Materials möglich ist. Übrigens ist die Vermutung Lanchesters nicht von Belang, da die Diskontinuitätstheorie in wirklichen Flüssigkeiten das tote Wasser durch Wirbelungen ersetzt. Für die ideale Flüssigkeit aber würde die Theorie Lanchesters schon deshalb ohne Bedeutung sein, weil hier keine verzögert fließenden Grenzschichten bestehen. So bleibt das tote Wasser in der vollkommenen Flüssigkeit ein schwerlich zu beseitigendes Hindernis der Helmholtzschen Theorie.

Die photographische Beobachtung der ersten Anfangsstadien der Strömung im Wasser lehrt nun, daß die Bewegung anfangs fast vollständig mit der reibungsfreien kontinuierlichen Eulerschen Potentialströmung übereinstimmt und gleichzeitig innerhalb des ganzen hydrodynamischen Feldes einsetzt. Es ist also jedenfalls von Anfang an kein totes Wasser vorhanden. Und wenn nun die theoretischen Trennungsflächen von den Kanten aus in der von Kirchhoff gezeichneten Weise in die Flüssigkeit vordringen sollten, so müßten sie die Kraftlinien senkrecht durchschneiden und dadurch die Bewegung hinter dem festen Körper zur Ruhe bringen. Das ist aber ein mechanisch unmöglicher Vorgang.

Von entscheidender Bedeutung ist endlich die Frage, ob die Kontinuität der Flüssigkeit wirklich in der Weise durch Kavitation aufgehoben werden kann, wie es die Theorie annimmt. Helmholtz selbst hat dies schon davon abhängig gemacht, daß die Flüssigkeiten wie Elektrizität fließen müßten. Diese Bedingung ist aber in Wirklichkeit nicht erfüllt, da die Trägheit der bewegten Flüssigkeitsmassen eine plötzliche Änderung der Richtung beim Umströmen einer scharfen Kante unmöglich macht. Damit entfällt aber die theoretische, unendlich große Geschwindigkeit an der Kante und das daraus abgeleitete Negativwerden des Gesamtdruckes, die Kavitation und die Bildung der Trennungsfläche.

Übrigens würde auch das Zerreißen der Flüssigkeit meines Erachtens nicht hinreichend begründet sein, da das Verhältnis zwischen Geschwindigkeit und Druck sich nur auf den dynamischen Druck beziehen kann und der statische Druck durch den Wechsel der Geschwindigkeit innerhalb des Feldes nicht berührt wird. Unter dynamischem Druck ist hier der Druck zu verstehen, der, unabhängig vom statischen Druck, durch einen bewegten Körper in der ruhend gedachten Flüssigkeit hervorgerufen wird. Die Geschwindigkeit kann nur zunehmen, solange der dynamische Druck positiv ist, und die beschleunigende Wirkung erreicht in dem Augenblick ihr Ende, wo der dynamische Druck auf Null gesunken ist. Der unveränderte statische Druck macht aber das Zerreißen der Flüssigkeit unmöglich, wie groß auch die Geschwindigkeit sein möge.

Schließlich sei noch hinzugefügt, daß dieselben Wirbelschichten, die nach der Diskontinuitätstheorie aus einer Kavitationsspalte hervorgehen, schon bei ganz geringen Geschwindigkeiten auch an solchen Körpern auftreten, die vollkommen stromlinienförmige Konturen haben und an denen somit die Bedingungen der Theorie nicht erfüllt sind.

Durch die mitgeteilten Tatsachen ist erwiesen, daß und warum die Theorie der diskontinuierlichen Flüssigkeitsbewegungen nicht mit der Wirklichkeit übereinstimmt und daß sie auch auf die vollkommene Flüssigkeit nicht anwendbar ist.

2. Die wirklichen Strömungen.

Die Dokumente der photographischen Analyse bestätigen, wie gesagt, daß die Strömungen der natürlichen Flüssigkeiten in den Anfangsmomenten nahezu vollständig die Form der kontinuierlichen Eulerschen Potentialströmungen haben. Dann aber entwickeln sich aus kleinen Anfängen an Kanten und Rändern sowie in der Nähe des größten Körperquerschnitts Abweichungen, die mit Wirbelungen verbunden sind und das anfängliche Strömungsbild bald bis zur Unkenntlichkeit abändern können. Da die natürlichen Flüssigkeiten von dem vollkommenen Medium der

Eulerschen Theorie durch die Zähigkeit unterschieden sind, lag es nahe, diese Abweichungen als Erzeugnisse der Reibung anzusehen.

Nun ist aber die Reibung in der freien Flüssigkeit fast verschwindend gering und ihre Wirkung im wesentlichen auf die Grenzschichten beschränkt, die mehr oder weniger an den festen Oberflächen haften. Es muß also noch eine besondere Ursache vorliegen, die geeignet ist, an

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 3, 4 u. 5.
Drei Entwicklungsstadien der Strömung um einen Halbzylinder. An den Kanten entstehen keine Trennungsflächen, sondern abgerundete Flüssigkeitskörper, Gyrome, aus denen durch Reibung die Wirbel des Unterdruckfeldes hervorgehen. Die Potentialströmung umfließt den festen Körper mit seinem gyromatischen Wirbelanhang.

bestimmten Orten Wirbel entstehen zu lassen und dadurch das anfänglich wirbelfreie Strömungsbild abzuändern.

Diese Ursache liegt in der Trägheit der bewegten flüssigen Massen, die es verhindert, daß die Teilchen den theoretischen Stromlinien so frei wie Elektrizität folgen können. Das zeigt sich besonders klar bei der Umströmung der Kanten eines Prismas. Der Strom bricht hier nicht mit unendlicher Geschwindigkeit im scharfen Winkel um die Kante, sondern geht ohne merkliche Änderung seiner endlichen Geschwindigkeit über die Kante hinaus und erreicht mit gekrümmten Stromlinien die andere Seite. Dabei entsteht in der Bucht des Stromes, unmittelbar neben der Kante, ein kleines Feld nahezu ruhender Flüssigkeit, das eine Art Ergänzung des festen Körpers bildet, ihn abrundet und den Konturen die Stromlinienform verleiht. Ich bezeichne dies flüssige Supplement kurz als ein Gyrom, von griech. γύρωμα, das Gerundete. Den festen Körper mit seinen Gyromen umfließt kontinuierlich die Potentialströmung.

Die in den Gyromen stockende Flüssigkeit wird nun durch Reibung von der Potentialströmung in Drehung versetzt und der so entstandene

Wirbel zugleich langsam von dem Orte seiner Entstehung fortgezogen. In dem frei werdenden Raume, unmittelbar neben der Kante, bildet sich sofort ein neues Gyrom, das wieder durch Reibung während seiner Entwicklung in einen Wirbel verwandelt wird und seinem Vorgänger folgt.

Dieselben Erscheinungen der Gyrom- und Wirbelbildung wiederholen sich hinter den rückwärtigen Kanten der Prismen. Alle Wirbel wandern längs der Körperwand nach hinten und gelangen so in den Raum hinter dem Hindernis, wo sie sich zu immer größer werdenden Aggregaten zusammenrollen. Dieser Vorgang vollzieht sich nach Analogie des Biot-Savartschen Gesetzes, und ist nur durch die Größe des Raumes im Kielwasser beschränkt.

Von den zahlreichen photographischen Aufnahmen über die Entstehung der Gyrome und des aus ihnen hervorgehenden Wirbel- und Unterdruckfeldes möchte ich hier nur als ein Beispiel die beliebig ausgewählten Abbildungen 3, 4 und 5 wiedergeben. Es sind drei charakteristische Entwicklungsstadien der Strömung um ein halbzylindrisches Profil von 120 mm Durchmesser.

Das erste Bild zeigt die anfängliche Potentialströmung, aber auch schon neben den Kanten des Modells die kontinuierlichen Ausbuchtungen der Stromlinien mit den eingeschlossenen Gyromen. Mit der Lupe erkennt man leicht unter den etwas störenden Lichtreflexen, daß in den Gyromen bereits eine Kette von drei bis vier Wirbeln entstanden ist, die längs der festen Wand nach hinten vorrücken.

Im zweiten Bilde haben sich die inzwischen zahlreich entstandenen Wirbel jederseits zu ansehnlichen Wirbelkörpern aufgerollt, die hinter der Mitte des Modells zusammenstoßen und so die Potentialströmung völlig von der Rückseite verdrängen.

Das dritte Stadium zeigt hinter dem Modell ein mächtiges Wirbelpaar, in welchem sich die in endloser Reihe am Orte des ursprünglichen Gyroms entstandenen primären Wirbel vereinigt haben. Beide Wirbel gehen in der Tiefe des Wassers, am unteren Ende des Modells, ineinander über. Sie bilden also zusammen einen halben Wirbelring, der sichtbar im Wasserspiegel endigt. Die Potentialströmung fließt von der Vorderseite des Modells über die Außenseite des Wirbelringes in glatten Stromlinien, die sich in einem Staupunkte hinter dem Wirbel wieder vereinigen. Die so bestimmte Grenzlinie zwischen der Potentialströmung und dem Unterdruckfelde des Wirbelringes ist in den Photogrammen unschwer zu verfolgen.

Der Wirbelring haftet an dem festen Körper. Sobald er aber durch die ständig hinzutretenden neuen Primärwirbelchen eine bestimmte Größe erreicht hat, werden von seinem hinteren Umfange in meist unregelmäßiger Periode Teile abgeschnürt, die hinter dem festen Körper im Kielwasser zurückbleiben und in der Ferne durch Reibung an Hypertrophie zugrunde gehen.

Fig. 6.
Das hydrodynamische Kraftfeld, das den Stromlinien der Fig. 3 zugeordnet ist. Die Kraftlinien sind die absoluten Stromlinien der Theorie.

In Fig. 6 ist auch noch das Photogramm des zweidimensionalen Kraftfeldes der Strömung in der Wasseroberfläche wiedergegeben. Das Stadium entspricht dem ersten Stadium der Stromlinienbilder. Das Feld hat die Form eines um die wirbelnden Gyrome zirkulierenden Ringwirbels, in dessen nach vorn gerichtete achsiale Durchströmung der feste Körper eingeschaltet ist. Während der Exposition in der feststehenden Kamera hat das Modell den Weg zwischen den beiden Stellungen zurückgelegt, die durch eingezeichnete gestrichelte und ausgezogene Linien angegeben sind. Im Innern des Modells können die Kraftlinien geradlinig und der Richtung der Fortbewegung parallel gedacht werden. In den Grenzschichten vollzieht sich der Übergang in die Richtungen des äußeren Feldes.

„Die Gyrome liegen außerhalb der Potentialströmung und werden von keiner Kraftlinie geschnitten, die vom festen Körper ausgeht und zu ihm zurückkehrt. Es kann daher im Anfangsmoment in den Gyromen nur der statische Druck bestehen. Sobald aber mit der Bewegung auch die Reibung wirksam wird, entstehen durch die tangentialen Schubkräfte in dem sonst toten Was-

ser der Gyrome konzentrische, in sich geschlossene Kraftliniensysteme, welche die Gyróme in Wirbel verwandeln und ihren statischen Druck durch die auftretenden zentrifugalen Trägheitskräfte um bestimmte Beträge herabsetzen. In der Nähe der Wasseroberfläche, wo der statische Druck klein ist, können diese Beträge leicht so groß werden, daß der Druck negativ wird und Kavitation eintritt. An Wirbeln, die an der Wasseroberfläche endigen, erscheint die Kavitation in der Form der bekannten trichterförmigen Einsenkungen des Spiegels, und die Tiefe der Trichter ist das Maß der Druckverminderung, die natürlich in größerer Tiefe nicht zur Kavitation führen kann.

Mit der Rotation der Wirbel bleibt auch der Minderdruck erhalten und wird mit ihnen über das ganze Wirbelfeld an den Flanken und hinter dem festen Körper verteilt. Das Gesamtfeld setzt sich hiernach zusammen aus dem von positiven dynamischen Druckkräften beherrschten Felde der Potentialströmung und dem gyromatischen oder Wirbelfelde, in welchem der statische Druck um den Betrag des zentrifugalen Minderdruckes verringert ist. Man kann diesen Unterdruck auch als negativen dynamischen Druck bezeichnen, wenn damit nichts über die Herkunft desselben ausgesagt werden soll. Man kann dann sagen, daß in jedem Punkte des Feldes der Gesamtdruck gleich der Summe des statischen und dynamischen Druckes ist, und daß an jedem Punkte der Körperoberfläche der Widerstandsdruck nach Größe und Art durch den daselbst vorhandenen dynamischen Druck bestimmt ist.

Beide Teile des Gesamtfeldes sind kontinuierlich miteinander verbunden. Die Zirkulation der Wirbelungen greift ohne Grenze auf die Potentialströmung hinüber. Auch wo bei großen Geschwindigkeiten in den Achsen der Wirbel Höhlungen auftreten, führt dies niemals zur Bildung einer Diskontinuitätsspalte, die, im Sinne der Helmholtzschen Theorie, als Trennungsfläche totes Wasser von der Potentialströmung scheidet.

Auch wenn die natürlichen Flüssigkeiten der Reibung nicht unterworfen wären, würden sie doch durch die Trägheit ihrer Massen daran verhindert sein, wie Elektrizität um scharfe Kanten zu fließen. Es würden immer an den kritischen Orten Gyrome entstehen müssen, die außerhalb der Potentialströmung liegen und als abrundende Anhänge des festen Körpers die Diskontinuität verhindern.

Die Bildung der Gyrome ist übrigens keineswegs an mehr oder weniger scharfe oder abgerundete Kanten gebunden. Wir finden sie an allen, wie immer gestalteten Körpern und auch an solchen, deren Profile vollkommene Stromlinien sind. Hier erscheinen sie zuerst nahe am Hauptspant, dem größten, senkrecht zur Fortbewegungsrichtung genommenen Querschnitt, wo die Geschwindigkeit am größten und der dynamische Druck auf Null gesunken ist. Die zentrifugale Zugspannung läßt hier in einem schmalen, sichelförmigen Gyrom dicht neben der festen Wand, den dynamischen Druck negativ werden, so daß diese Flüssigkeit aus der Potentialströmung ausscheidet und zugleich durch Reibung in Rotation versetzt wird. Das vordere Ende dieser Gyrome mit der Rotationslinie, an welcher die Wirbel entspringen, liegt im Anfang der Bewegung in der Querebene des Hauptspants und wandert mit zunehmender Geschwindigkeit nach vorn bis zu dem Punkte, wo die mit v^2 wachsende Zentrifugalkraft den dynamischen Druck unter Null sinken läßt. Die entstandenen Wirbelschichten verdrängen die Potentialströmung vom hinteren Umfang des Körpers und ändern das Strömungsbild wie oben beschrieben.

Es bleibt uns nun noch der Fall der Flüssigkeitsstrahlen zu untersuchen, die wenigstens in dem Beispiel der Rauchfäden den Eindruck hervorrufen als wären sie von ihrer Austrittsstelle ab durch eine Unstetigkeitsfläche von der umgebenden ruhenden Luft getrennt. Diese Erscheinungen waren es ja, die Helmholtz zur Aufstellung der Diskontinuitätstheorie veranlaßten, und auch Lord Kelvin gab zu, daß wenigstens in diesem Falle die Theorie zutreffend sein werde.

Die Vorgänge wurden im Wasser untersucht, wo sie nach Helmholtz von gleicher Art sind wie in der Luft. Dazu wurde ein hohler Messingzylinder von 150 mm Länge, 50 mm Durchmesser und 1 mm Wandstärke verwendet. Dieser wurde mit einem Längsschlitz von 4 mm Breite versehen und an einer Seite mit einem Boden verschlossen. Durch die Mitte des Bodens führte ein Metallrohr von 10 mm Weite, das einem Gummischlauch als Ansatz diente. Der Zylinder wurde nun bis auf 20 mm vom offenen Rande in das Wasser eines großen Behälters eingetaucht und in senkrechter Stellung festgehalten. Durch den als Heber wirkenden Schlauch kann das durch den Spalt eindringende Wasser abgelassen und so im äußeren Felde eine Senke hergestellt werden, während bei Zuleitung des Wassers durch den Schlauch der Druck im Innern erhöht und die Strömung durch den Spalt nach außen tritt. Die Vorgänge wurden in der Wasseroberfläche durch Lykopodium sichtbar gemacht und in Momentaufnahmen festgehalten.

Die Senke, das Einströmen der Flüssigkeit durch den Spalt, bietet das Bild (Fig. 7) einer schönen, wirbelfreien Bewegung mit Stromlinien, die von allen Seiten gegen den Spalt konvergieren und über den ganzen Umfang des Zylinders verbreitet sind.

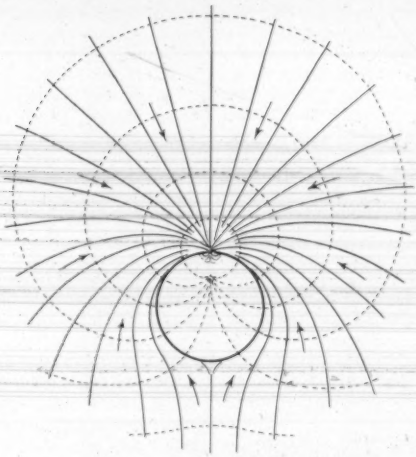

Fig. 7.
Strömung einer Senke, die durch einen Spalt in das Innere eines Zylinders abfließt. Die gestrichelten Kurven sind außerhalb des Zylinders Linien gleichen Druckes. Zeichnung nach Photogramm.

Theoretisch müßte nun dieselbe Potentialströmung mit entgegengesetzter Richtung als Quelle erscheinen, wenn der Druck im Innern des Zylinders erhöht wird und die Flüssigkeit durch den Spalt nach außen tritt. Die Annahme einer solchen Übereinstimmung ist aber nur für den ersten Anfangsmoment zulässig, denn in dem Augenblick, wo die Bewegung zuerst in unmittelbarer Nähe des Spaltes sichtbar wird, zeigt sich auch schon in der Einschnürung der austretenden Flüssigkeit am Ausgang des Spaltes die Gyrombildung und der erste Wirbel (Fig. 8 I). Damit ist die vollständige Umwandlung der Strömung eingeleitet. Durch die Zirkulation des Wirbels wird die abfließende Bewegung der nächsten Stromlinien umgebogen und an der Zylinderwand gegen den Spalt zurückgeleitet. Dieser Bewegung folgt die äußere Flüssigkeit und drängt sich so zwischen den Wirbel und den austretenden Strom. Dem verdrängten Wirbel folgt schnell aus dem Gyrom im Spalt ein neuer mit denselben Begleiterscheinungen, so daß nun in der Nähe des Spaltes statt der anfänglichen, nach allen Seiten auseinanderfließenden Quelle eine senkenartige Zuströmung besteht (Fig. 8 II), die sich von beiden Seiten kontinuierlich dem entstandenen Strahl der austretenden Flüssigkeit anschließt (Fig. 8 III). Damit ist erwiesen, daß der Strahl nicht durch eine Diskontinuitätsfläche von ruhender Flüssigkeit getrennt ist, er bewegt sich vielmehr kontinuierlich mit seiner Umgebung in der Zirkulation um eine Wirbelschicht, die ihn in weiterem Abstande umgibt und aus dem Gyrom im Spalt entstanden ist.

Im Innern des Zylinders würde der Abfluß die Form einer wirbelfreien Senke haben, wenn er nicht durch den turbulenten Zufluß aus dem Heberschlauch gestört wäre.

Zusammenfassung.

Es wird gezeigt, daß aus der theoretischen, unendlich großen Geschwindigkeit der Potentialströmung an scharfen Kanten nicht auf das Negativwerden des Gesamtdruckes und Zerreißen der Flüssigkeit geschlossen werden kann, da die Abhängigkeit der Geschwindigkeit bzw. der kinetischen Energie vom Druck sich nur auf den dynamischen Druck bezieht und der davon unberührte statische Druck die Kavitation verhindert. Die Bildung einer Kavitationsspalte mit anschließender Trennungsfläche und totem Wasser ist daher durch die Schlußfolgerungen der Diskontinuitätstheorie nicht hinreichend begründet. Die natürlichen Flüssigkeiten erfüllen ohnehin nicht die Vorbedingungen der Theorie, da sie durch das Gesetz der Trägheit verhindert sind, wie Elektrizität um Kanten und Ränder zu fließen.

In Wirklichkeit bewegen sich die natürlichen Flüssigkeiten vermöge ihrer Trägheit (und Zentrifugalkraft) über Kanten und Ränder hinaus auf kontinuierlichen Stromlinien und umfließen dabei gerundete Flüssigkeitskörper, „Gyrome", welche der Potentialströmung nicht angehören.

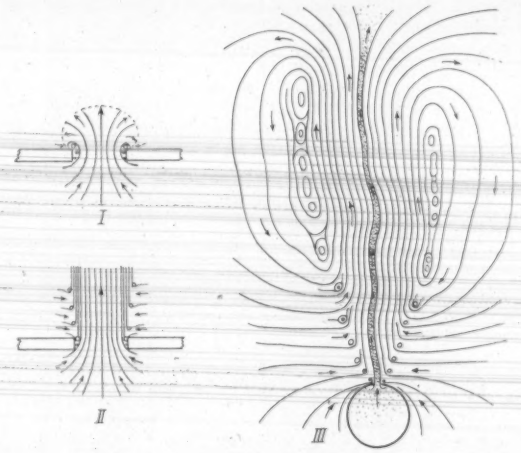

Fig. 8.

Durch einen Spalt in der Wand eines Zylinders dringt Flüssigkeit in das äußere Feld. I. Anfangsstadium in Form einer Quelle, aber mit Gyrombildung in der Austrittsöffnung. II. Vorgänge in der Nähe des Spaltes in einem späteren Stadium. Die aus den Gyromen hervorgehenden Wirbel formen den Stiel der Quelle zu einem Strahl. III. Der fertige Strahl zwischen den Zirkulationen der beiden Wirbelschichten. Das System ist räumlich ein Wirbelring. Zeichnung nach Photogramm.

Die Gyrome können als flüssige Anhänge des festen Körpers angesehen werden, die ihn so abrunden, daß er Stromlinienform erhält, und die Strömung ringsum ohne weitere Störung verläuft.

Durch die zentrifugalen Zugkräfte der umschließenden Potentialströmung wird der in den Gyromen herrschende statische Druck vermindert und in Unterdruck verwandelt, die gyromatische Flüssigkeit aber durch Reibung in Rotation versetzt und langsam fortbewegt. Die so entstehenden Wirbel dringen zwischen Körperwand und Potentialströmung in den Raum hinter dem festen Körper, wobei sie sich nach dem Biot-Savartschen Gesetz zu immer größeren Wirbelaggregaten zusammenrollen. Durch die Rotation der Wirbel wird auch der Unterdruck aufrecht erhalten, der den bisher nicht erklärbaren negativen Flüssigkeitswiderstand bedingt.

(Eingegangen 14. November 1927.)

Über die Bilder im Winkelspiegel.

Von T. Oryng.

Es herrscht in der physikalischen Literatur eine merkwürdige unrichtige Meinung in bezug auf die Anzahl der im Winkelspiegel entstehenden Bilder. So wird — sogar in den besten Lehrbüchern (z. B. in Lommels Lehrbuch der Experimentalphysik) — behauptet, daß bei Anwendung zweier Spiegel, deren spiegelnde Flächen einen Winkel miteinander bilden, der in 360^0 n-mal (wo n eine ganze Zahl ist) enthalten ist, die Zahl der entstandenen Bilder $n-1$ ist. Es ist unschwer, sich durch ein Experiment oder mit Hilfe einer Zeichnung zu überzeugen, daß die Tatsachen dieser Behauptung widersprechen, und zwar für alle Fälle, wo n eine ungerade Zahl ist, d. h. für Winkel, die von 120, 72, 40, 24 und 8^0. Ferner kann man ohne große Mühe auch die Regeln für beliebige Winkel ableiten. Dieser Gegenstand wird von mir an anderem Orte ausführlich behandelt, hier sollen nur die Ergebnisse in aller Kürze zusammengefaßt werden.

Ist der Winkel, den die beiden Spiegel miteinander bilden, gleich α, dann ist $360 : \alpha = n + p$, wo n eine ganze Zahl und p — ein echter Bruch ist. Wird $p = 0$, so sind zwei Fälle zu unterscheiden: 1. n ist eine ungerade Zahl und 2. n ist eine gerade Zahl. Im ersten Falle ist die Bilderanzahl nur dann $n-1$, wenn der Lichtpunkt sich an der Winkelhalbierenden befindet, sonst aber ist sie immer gleich n. Z. B.: für

$\alpha = 72^0$ ist die Zahl der Bilder — je nach der Lage des Lichtpunkts — 4 oder 5 (s. Fig. 1).

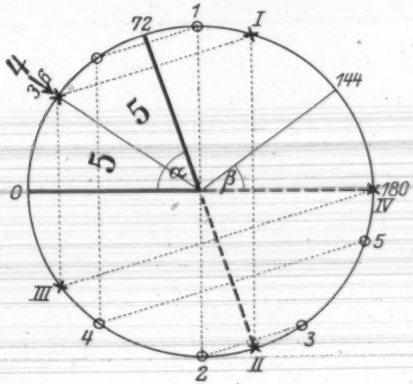

Fig. 1.

Im zweiten Falle dagegen ist die Bilderanzahl für den ganzen Winkelraum gleich $n - 1$, weil hier zwei Bilder zusammenfallen, einer Symmetrie zufolge, die ergibt, daß eine der Abbildungen des einen Spiegels Fortsetzung des anderen ist.

Ist $\rho > 0$, dann wird für den gegebenen Winkel die Zahl der Bilder gleich n oder $n + 1$.

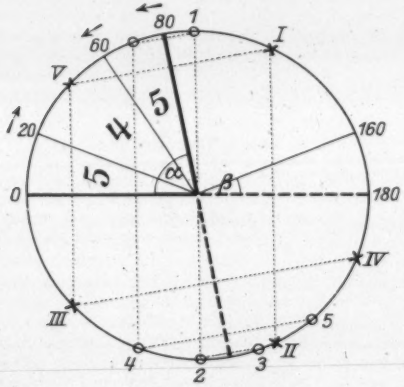

Fig. 2.

In dem durch die spiegelnden Flächen gebildeten Winkelraume sind dann zweierlei Gebiete zu unterscheiden: befindet sich der Lichtpunkt in einem der Gebiete — dann ist die Bilderanzahl gleich n, befindet er sich in dem anderen — dann ist die Zahl der Bilder gleich $n + 1$.

Die Größe des Winkels der beiden Spiegel erlaubt über die gegenseitigen Grenzen der zu unterscheidenden Gebiete zu urteilen. Wir setzen: $180 - m\alpha = \beta$, wo m eine ganze Zahl ist, die angibt, wievielmal der Winkel α in 180^0 enthalten ist. Ist $\beta < \frac{\alpha}{2}$, dann gibt es zwei Gebiete denen $n + 1$ Bilder entsprechen. Diese Gebiete haben als je eine Grenze die beiden Spiegelflächen, und die Winkelweite dieser Grenzen ist kleiner als β. In größeren Winkelentfernungen befindet sich das Gebiet mit n Bildern (Fig. 2).

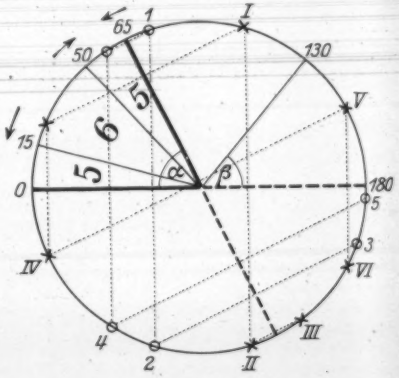

Fig. 3.

Ist $\beta > \frac{\alpha}{2}$, dann liegt das Gebiet mit $n + 1$ Bildern in dem Mittelraume und die Gebiete mit n Bildern befinden sich an den Seitenräumen. Die Abgrenzung der Gebiete erfolgt in Abständen, die — von den Spiegelflächen abgezählt — gleich $\alpha - \beta$ sind (Fig. 3).

Die Pfeile an den Abbildungen oberhalb der Winkelzahlen zeigen, nach welcher Richtung sich die Grenzlinien verschieben, wenn der Spiegelwinkel kleiner wird. Gehen sie nach dem Zusammenfallen wieder auseinander, so nimmt dann die Bilderanzahl um eins zu.

Warschau, Josef Poniatowski-Staatsgymnasium, 10. November 1927.

(Eingegangen 14. November 1927.)

Über Chromasie.

(Nach Versuchen von Herrn stud. Erich Samuel mitgeteilt.)

Von Richard Gans.

In der Überzeugung, daß im physikalischen Praktikum auch feinere optische Methoden zu ihrem Recht kommen müssen, schlug ich Herrn stud. Erich Samuel vor, eine Versuchsanordnung auszuarbeiten, die es gestattet, die chromatischen Fehler eines Objektivs quantitativ zu bestimmen. Nachträglich stellte sich allerdings heraus, daß diese Methode bereits von Hartmann[1]) angegeben worden ist. Wenn ich sie trotzdem kurz beschreibe, so geschieht es, weil die Methode in Physikerkreisen zu wenig bekannt geworden zu sein scheint, dann aber auch, um zu zeigen, daß die Versuchsanordnung, die von Hartmann auf die Untersuchung des Potsdamer 80 cm-Refraktors angewandt worden ist, sich auch für kleine Objektive — z. B. von 2,5 cm Durchmesser — eignet.

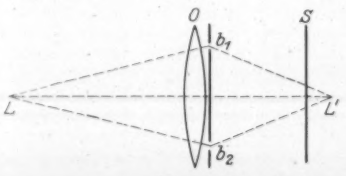

Fig. 1.

Ferner soll kurz darauf eingegangen werden, wie man theoretisch ein Maß für die Chromasie eines Objektivs aufstellen und somit auch zwei verschiedene Objektive bezüglich der Güte ihrer chromatischen Korrektur miteinander vergleichen kann.

Schließlich soll auch angegeben werden, welchen Grad der Achromasie man bei gegebenen Glassorten erwarten kann, und wie sich die Krümmungsradien der Linsen zur Erreichung dieses Ziels berechnen.

Ich glaube zwar nicht, daß man auf Grund dieser Formeln weiter kommen wird, als das durch die reiche Erfahrung der Praxis bereits geschehen ist. Aber es ist doch unbefriedigend, wenn man in den Lehr- und Handbüchern einfach routinemäßige Angaben über die beiden Wellenlängen findet, die man von vornherein auswählt, um für sie gleiche Brennweiten herzustellen. Man fragt sich hier: Warum gerade diese beiden? Warum berücksichtigt man alle anderen Wellenlängen nicht? Und da man auf Grund dieser Auswahl die für die Farbenkorrektion in Betracht kommenden geometrischen Größen eindeutig berechnen kann, so erwecken die Darstellungen leicht den Glauben, als ob das nach dieser Berechnung konstruierte Objektiv für dieses Farbenpaar und nur für dieses korrigiert wäre, derart, daß man durch Messung nachträglich sagen könne, für welche beiden Wellenlängen die Achromasie erzielt wäre[1]). Davon ist aber gar nicht die Rede, denn es gibt unendlich viele Wellenlängenpaare, für die der Achromat gleiche Brennweiten hat.

Dem logischen Bedürfnis nach etwas mehr Klarheit und nach Eindeutigkeit der Begriffe sollen die theoretischen Ausführungen der letzten beiden Paragraphen dienen.

§ 1. Die experimentelle Bestimmung der Chromasie nach Hartmann.

Die Versuchsanordnung der Hartmannschen Methode ist die folgende (Fig. 1). Das zu untersuchende Objektiv O wird bis auf zwei gleich große, gleich weit von der optischen Achse entfernte, vertikal übereinander liegende kleine Löcher b_1 und b_2 abgedeckt. L ist eine punktförmige Lichtquelle weißen Lichts. Die von ihr ausgehenden Strahlen treten durch b_1 und b_2 hindurch und treffen auf den Spalt S eines Spektrographen, bevor sie sich in dem L konjugierten Punkte L' (wegen der Chromasie würde man besser sagen: in den L konjugierten Punkten) vereinigen.

Da die Strahlen verschiedener Wellenlängen wegen der Chromasie des Objektivs den Spalt in verschiedener Höhe treffen, erhält man auf der photographischen Platte zwei gekrümmte kontinuierliche Spektren, das eine von b_1, das andere von b_2 herrührend, etwa wie es Fig. 2 andeutet.

Fig. 2.

Um die Wellenlängen für alle Stellen dieser beiden gekrümmten Spektren zu kennen, wird dann noch das *He*-Spektrum darüberphotographiert. So sind die beiden Aufnahmen Fig. 3 und Fig. 4 entstanden, die erstere mittels eines Brillenglases, die zweite mittels eines Zeißschen Projektions-Achromaten. Die Spektren gehen auf der einen Seite nur bis ins Gelbe, weil die

1) J. Hartmann, Publikationen des Astrophys. Obs. zu Potsdam **15**, 26 ff., 1908 und Tafel 7, Fig. 2 und 3.

1) Siehe z. B. die Methode von H. C. Vogel (vgl. F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Phys., 15. Aufl., S. 352. Leipzig u. Berlin 1927).

Empfindlichkeit der photographischen Platten für größere Wellenlängen nicht ausreichte, auf der anderen Seite aber verhältnismäßig weit ins Ultraviolette hinein, da der benutzte kleine Spektrograph Quarzoptik hatte[1]). Daher erklärt sich auch die geringe Dispersion, die aber für den vorliegenden Zweck völlig genügt.

Fig. 3.

Um nun aus den Abständen der beiden Kurven voneinander die Brennweitendifferenzen zu erhalten, macht Hartmann eine zweite extrafokale Aufnahme, bei der S nicht zwischen O und L', sondern jenseits L' sich befindet. Wir

Fig. 4.

müssen uns aus Gründen der Einfachheit mit einer Aufnahme begnügen und verfahren zur Berechnung der Brennweitendifferenzen folgendermaßen:

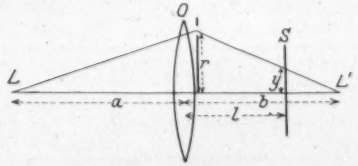

Fig. 5.

Aus Fig. 5 folgt für eine bestimmte Wellenlänge

$$\frac{y}{r} = \frac{b-l}{b}, \qquad (1)$$

wenn b die Bildweite, l der Abstand des Spalts vom Objektiv, r der halbe Abstand der Blenden b_1 und b_2 voneinander, y der halbe Abstand der durch b_1 und b_2 hindurchgetretenen Strahlen auf dem Spalte S ist.

Eliminiert man b aus der Linsenformel

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \qquad (2)$$

mittels (1), so erhält man

$$\frac{1}{a} + \frac{r-y}{rl} = \frac{1}{f}. \qquad (3)$$

Geht man zu einer anderen Wellenlänge über, so ändern sich y und f, dagegen bleiben a, r und l konstant. Also erhält man durch Differenzbildung

$$f\,\frac{\Delta y}{rl} = \frac{\Delta f}{f}, \qquad (4)$$

woraus sich Δf als Funktion von λ bestimmt, wenn man von dem f irgendeiner beliebigen Wellenlänge als dem normalen ausgeht, für diese also $\Delta y = 0$ und $\Delta f = 0$ setzt. Da man die Abstände der Kurven auf der photographischen Platte mit dem Komparator oder einem Mikroskop mit Objektschraubenmikrometer ausmißt, so ist natürlich noch die Vergrößerung des Spektrographen zu bestimmen, um aus den gemessenen Abständen auf die Δy schließen zu können. Dies geschah, indem man eine in Millimeter geteilte Glasskala unmittelbar an den weit geöffneten Spalt S heransetzte und photographierte. Bei unserem Apparat betrug die Vergrößerung 0,9914.

Die Resultate für das Brillenglas ($f = 167$ mm) sind in folgender Tabelle wiedergegeben.

λ	587,6	501,6	471,3	447,2	388,9	344,8
$\frac{\Delta f}{f} \cdot 10^4$	0	−123	−176	−233	−407	−551

Manchmal begnügen wir uns damit, das Phänomen einfach beobachten anstatt photographieren zu lassen, indem die Kamera durch ein Fernrohr ersetzt wird. Der Unterschied im Verhalten der einfachen Linse und des Achromaten ist dann besonders augenfällig wegen der Vergrößerung durch das Okular. Die Aufgabe besteht dann im Aufbau der Versuchsanordnung, in der Justierung, der Ableitung der Formel und der selbständigen Entscheidung, ob S zwischen O und L' oder jenseits L' liegt, wovon die Vorzeichen der Δf abhängen.

§ 2. Das Maß der Chromasie.

Jetzt wollen wir ein Maß für die Größe der Chromasie aufstellen, das es ermöglicht, zwei Objektive bezüglich ihrer Farbenfehlerkorrektion miteinander zu vergleichen.

1) Ein anderer Apparat steht einstweilen für den vorliegenden Zweck nicht zur Verfügung.

Wir nehmen an, eine ebene Lichtwelle, deren Wellenlängen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegen, und deren Intensität $I(\lambda)d\lambda$ sei, falle auf eine im Abstande x vom Objektiv aufgestellte photographische Platte P (Fig. 6), deren Empfindlich-

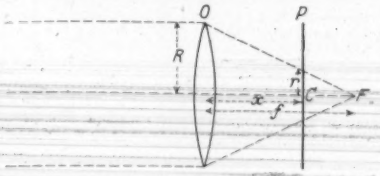

Fig. 6.

keit für die betrachtete Wellenlänge $e(\lambda)$ sei. Wir nennen $I(\lambda) \cdot e(\lambda) = S(\lambda)$ das Schwärzungsvermögen, das also sowohl von der Emissionskurve der Lichtquelle als auch von der Plattensorte (bzw. der Empfindlichkeitskurve des Auges) abhängt.

Auf der Platte erhalten wir durch die Belichtung geschwärzte Silberkörner, die symmetrisch um den Durchstoßpunkt C der optischen Achse angeordnet sein werden. Nennen wir ϱ den Abstand eines solchen Teilchens von C, und befinden sich $n(\varrho)$ Teilchen auf der Flächeneinheit der Platte, so gibt uns $n(\varrho)$ das „Schwärzungsgebirge".

Wir fragen nun nach dem mittleren Quadrat $\overline{\varrho^2}$ aller Abstände bei Beleuchtung mit weißem Licht, suchen diejenige Stellung $\bar{x}$ der Platte, für die $\overline{\varrho^2}$ ein Minimum ist, und berechnen $\overline{\varrho^2}$ für diesen Wert $\bar{x}$.

Zuerst betrachten wir monochromatisches Licht. Da die ebene Welle von kreisförmigem Querschnitt mit dem Radius R (R halber Durchmesser des Objektivs) sich durch die Strahlenbrechung auf den Radius r auf der Platte zusammengezogen hat, so wird $n(\varrho)$ proportional $\frac{R^2\pi S d\lambda}{r^2\pi}$ sein, und bei geeigneter Wahl der Einheiten können wir anstatt proportional direkt gleich setzen. Wir haben also

$$\left.\begin{aligned} n(\varrho) &= \frac{R^2}{r^2} S d\lambda \quad \text{für } \varrho < r \\ \text{und} \quad n(\varrho) &= 0 \qquad\quad \text{für } \varrho > r, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

so daß

$$\Sigma\varrho^2 = 2\pi R^2 \int \frac{S d\lambda}{r^2} \int_0^r \varrho^3 d\varrho = \frac{\pi R^2}{2} \int r^2 S d\lambda$$

wird. Da nun aus Fig. 6 folgt

$$\left.\begin{aligned} \frac{r}{R} &= \frac{f-x}{f} \quad \text{für } f > x \\ \frac{r}{R} &= \frac{x-f}{f} \quad \text{für } f < x, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

so erhalten wir

$$\Sigma\varrho^2 = \frac{\pi R^4}{2} \int \left(1 - \frac{x}{f}\right)^2 S d\lambda. \tag{7}$$

Diese Größe wird ein Minimum, wenn

$$\int \left(1 - \frac{\bar{x}}{f}\right) \frac{S d\lambda}{f} = 0 \text{ oder } \bar{x} \cdot \int \frac{S d\lambda}{f^2} = \int \frac{S d\lambda}{f} \tag{8}$$

Nun setzen wir

$$f = f_0 (1 + \varepsilon(\lambda)), \tag{9}$$

und verstehen unter f_0 eine mittlere oder „normale" Brennweite. Die höheren Potenzen von ε vernachlässigen wir, so daß sich aus (8) ergibt

$$\bar{x} = f_0 \left| 1 + \frac{\int \varepsilon S d\lambda}{\int S d\lambda} \right|. \tag{10}$$

Wählt man die Normalwellenlänge λ_0, für die $f = f_0$ ist, so, daß

$$\int \varepsilon S d\lambda = 0,$$

d. h. nach (9), daß

$$\int \Delta f \cdot S d\lambda = 0,$$

so wird

$$\bar{x} = f_0,$$

und das Minimum von $\Sigma\varrho^2$ wird nach (7)

$$\Sigma\varrho^2 = \frac{R^4\pi}{2} \int \left(1 - \frac{f_0}{f}\right)^2 S d\lambda = \frac{R^4\pi}{2} \int \varepsilon^2 S d\lambda. \tag{11}$$

Somit wird der Mittelwert

$$\overline{\varrho^2} = \frac{\Sigma\varrho^2}{R^2\pi \int S d\lambda} = \frac{R^2}{2} \frac{\int \varepsilon^2 S d\lambda}{\int S d\lambda}, \tag{12}$$

und

$$\frac{\overline{\varrho^2}}{R^2} = \frac{1}{2} \frac{\int \varepsilon^2 S d\lambda}{\int S d\lambda} \tag{13}$$

wird ein Maß für die Chromasie sein.

Nennen wir

$$\overline{\varphi} = \frac{\int \varphi S d\lambda}{\int S d\lambda} \tag{14}$$

den Mittelwert der Funktion φ von λ, so wird

$$\frac{\overline{\varrho^2}}{R^2} = \frac{\overline{\varepsilon^2}}{2} = \frac{1}{2} \frac{\overline{(\Delta f)^2}}{f_0^2}. \tag{13'}$$

Da es schwer sein wird, bei einem guten Objektiv das Schwärzungsgebirge des Bildes einer punktförmigen Lichtquelle (also die linke Seite von (13')) zu bestimmen, wird man zur Ermittlung der Chromasie die rechte Seite von (13') heranziehen. Dazu photographiert man mittels der bestimmten Lichtquelle auf die photographische Platte der bestimmten Sorte ein Spektrum und bestimmt das Schwärzungsvermögen $S(\lambda)$ durch Ausphotometrierung dieses Spektrums, natürlich unter Berücksichtigung der von λ abhängigen Dispersion. Dann mißt man — etwa nach der in § 1 auseinandergesetzten Hartmannschen Methode — $\varepsilon(\lambda)$ und rechnet nach (13').

§ 3. Vorausberechnung eines Achromaten.

Wir wollen jetzt zur Berechnung eines Achromaten aus gegebenen Glassorten übergehen, beschränken uns aber auf den Fall, daß die beiden Linsen als unendlich dünn und unendlich benachbart aufgefaßt werden können.

Dann gilt

$$(n_1 - 1)\, k_1 + (n_2 - 1)\, k_2 = \frac{1}{f}, \qquad (15)$$

wo n_1 und n_2 die Brechungsindizes der beiden Glassorten, k_1 und k_2 die Summe der Krümmungen der Linsenoberflächen für die erste bzw. zweite Linse bedeuten.

Gehen wir zu einer anderen Wellenlänge über, so folgt aus (15)

$$\nu_1 k_1 + \nu_2 k_2 = -\frac{\varepsilon}{f_0}, \qquad (16)$$

wo ε durch (9) definiert ist, f_0 die Brennweite für irgendeine als „normal" zu bezeichnende Wellenlänge λ_0 ist, und

$$\nu_1 = n_1 - n_{10}; \quad \nu_2 = n_2 - n_{20} \qquad (17)$$

die Differenzen für die Wellenlängen λ und λ_0 bedeuten. Dann folgt aus (7) und (8) mit Einführung von (9)

$$\Sigma \varrho^2 = \frac{R^4 \pi}{2} \int (\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2 \, S \, d\lambda, \qquad (18)$$

wo $\bar{\varepsilon}$ der Mittelwert von ε, wie immer im Sinne der Gleichung (14) ist.

Mit Benutzung von (16) ergibt sich daraus

$$\Sigma \varrho^2 = \frac{R^4 \pi}{2} f_0^2 \int [\nu_1 k_1 + \nu_2 k_2 - (\bar{\nu}_1 k_1 + \bar{\nu}_2 k_2)]^2 S \, d\lambda.$$

Dies ist das Minimum von $\Sigma \varrho^2$ bezüglich x, d. h. bei günstigster Stellung der photographischen Platte, aber bei gegebenen k_1 und k_2.

Jetzt sollen aber auch die günstigsten Werte von k_1 und k_2 gesucht werden. Es ist also

$$\int [(\nu_1 - \bar{\nu}_1) k_1 + (\nu_2 - \bar{\nu}_2) k_2]^2 \, S \, d\lambda$$

als Funktion von k_1 und k_2 zum Minimum zu machen, während nach (15)

$$f_0 \alpha_1 k_1 + f_0 \alpha_2 k_2 = 1 \qquad (19)$$

sein muß, wo

$$n_{10} - 1 = \alpha_1; \quad n_{20} - 1 = \alpha_2 \qquad (20)$$

für die normale Wellenlänge λ_0 gelten.

Führen wir die Bezeichnungen ein

$$\begin{aligned} a_{11} &= \overline{\nu_1^2} - (\bar{\nu}_1)^2; \quad a_{22} = \overline{\nu_2^2} - (\bar{\nu}_2)^2; \\ a_{12} &= \overline{\nu_1 \nu_2} - \bar{\nu}_1 \bar{\nu}_2, \end{aligned} \qquad (21)$$

wo die ν durch (17) definiert sind, so ergibt sich das folgende Resultat

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{f_0} \frac{a_{22}\alpha_1 - a_{12}\alpha_2}{a_{11}\alpha_2^2 - 2 a_{12}\alpha_1\alpha_2 + a_{22}\alpha_1^2} \\ k_2 &= \frac{1}{f_0} \frac{a_{11}\alpha_2 - a_{12}\alpha_1}{a_{11}\alpha_2^2 - 2 a_{12}\alpha_1\alpha_2 + a_{22}\alpha_1^2} \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

und $\frac{\varrho^2}{R^2}$ nimmt den Wert an

$$\frac{\varrho^2}{R^2} = \frac{1}{2} \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}\alpha_2^2 - 2 a_{12}\alpha_1\alpha_2 + a_{22}\alpha_1^2} \qquad (23)$$

Man hat also aus (22) die Größen k_1 und k_2 zu berechnen und erhält als Maß der Chromasie der betreffenden Glassorten den Ausdruck (23). Hierbei sind α_1 und α_2 durch (20) und die a_{ik} durch (21) und (17) definiert.

Die obigen Überlegungen basieren auf den Prinzipien der geometrischen Optik, es ist also von der durch Beugung verursachten Ausbreitung des Bildes abgesehen. Ferner ist die Voraussetzung gemacht, daß die Schwärzung der Beleuchtungsintensität proportional ist, was bekanntlich nicht zutrifft. Trotzdem glaube ich, daß die Ausführungen zur begrifflichen Klärung sowie zur quantitativen Beurteilung des Grades der Chromasie beitragen können.

Königsberg i. Pr., 8. Nov. 1927, II. Physikalisches Institut.

(Eingegangen 18. November 1927.)

BESPRECHUNGEN.

A. G. Webster, Partial differential equations for mathematical physics. Edited by S. I. Plimpton. VII u. 440 S. Mit 97 Figuren. New York, G. E. Stechert u. Co., Leipzig, B. G. Teubner. 1927. M. 23.—, geb. M. 25.—.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, klarzumachen, wie die Integrationsmethoden der in der mathematischen Physik vorkommenden partiellen Differentialgleichungen aus allgemeinen Gesichtspunkten gewonnen werden können. Man hat nämlich zwei wesentliche Methoden: die erste Methode geht von Reihenentwicklungen bzw. Integraldarstellungen aus, deren Muster die Fourierschen Reihen bzw. Integraldarstellungen sind, die zweite Methode verallgemeinert die in der Potentialtheorie auf Green, bei hyperbolischen Differentialgleichungen auf Riemann zurückgehende Schlußweise.

In dem vorliegenden Buche werden nun zunächst die wichtigsten partiellen Differentialgleichungen, wie die des Wärmeflusses, der Hydrodynamik und des Schalles, der Elastizität, der Strömung der Elektrizität in Drähten und schließlich die Maxwellschen Gleichungen kurz abgeleitet. Wegen späterer Verwendung wird sodann die Integration partieller Diffe-

rentialgleichungen erster Ordnung gebracht. Im dritten Kapitel werden die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen bei konstanten Koeffizienten in elliptische, hyperbolische und parabolische eingeteilt und explizit integriert, was hier der oben erwähnten zweiten Methode entspricht. Das Problem der kleinen Schwingungen für endlich viele Punkte leitet dann durch Grenzübergang zu den Fourierreihen über, wobei die Fundamentalbegriffe aus der Theorie der Integralgleichungen gebracht werden. Dieses geschieht alles propädeutisch und erhält erst im vierten Kapitel seine festen Grundlagen durch die exakte Theorie der Fourierreihen und Fourierintegrale, die bei unendlich großem Intervalle bzw. Bereiche an die Stelle der Reihen treten. Die Darstellung durch Fourierintegrale wird dann in Anschluß an Cauchy zur Gewinnung von Integralen der Wellengleichung, der Wärmeleitungsgleichung und der Telegraphengleichung benützt. Im fünften und sechsten Kapitel kommt, abgesehen von wenigen Bemerkungen, die zweite Methode zur Geltung; zunächst werden die bekannten Methoden der Potentialtheorie gebracht, die Greensche Funktion wird eingeführt, der Zusammenhang der Theorie der schwingenden Membrane mit den Integralgleichungen wird dargelegt. Das sechste Kapitel behandelt die Riemann-Volterrasche Integrationstheorie bei hyperbolischen und hyperbolisch-elliptischen Differentialgleichungen sowie die in der Physik besonders wichtige Fortpflanzung von Unstetigkeiten in diesen Fällen. Kapitel 7 und 8 sind der Theorie und Anwendung der Kugelfunktionen, Zylinderfunktionen und Laméschen Funktionen gewidmet, Kapitel 9 den Integralgleichungen. In dem Anhang wird neben anderem eine kurze funktionentheoretische Behandlung der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen gebracht.

Das Buch bringt bei verhältnismäßig geringem Umfang eine Menge von Stoff. Angenehm berührt die fortlaufende Verbindung der mathematischen Entwicklungen mit physikalischen Deutungen. Erstaunt war ich nur über die Bemerkung des Herausgebers in der Einleitung, daß der verstorbene Verfasser zwischen der Cauchyschen Benützung des Fourierintegrals und der Methode der Entwicklungen nach Normalfunktionen eine Disharmonie empfand, ohne dem Stande des heutigen Wissens gemäß diese vollständig aufzuklären. Aber solche Kleinigkeiten vermindern den Wert des Buches nicht, das ich wegen seiner Reichhaltigkeit warm empfehlen kann. E. Hilb.

K. K. Darrow, Introduction to Contemporary Physics. Gr. 8°. XXVI u. 453 S. Mit 85 Fig. New York, D. van Nostrand Company. 1926. $ 6.00.

Das Buch ist aus einer Reihe von Artikeln über neuere Fortschritte der Physik entstanden, die in einer amerikanischen technischen Zeitschrift erschienen sind. Es behandelt die neueren experimentellen Fortschritte der Atomphysik, bzw. der Elektronenphysik und eine Auswahl der zum Verständnis der Experimente nötigen theoretischen Überlegungen. Das Buch wendet sich etwa an den gleichen Leserkreis wie das bekannte Buch von W. Gerlach, „Materie, Elektrizität, Energie"; trotz des größeren Umfangs ist allerdings der Kreis der behandelten Gegenstände erheblich enger gezogen als in diesem.

Das Buch soll eine „Einführung in die heutige Physik" geben; es beansprucht von vornherein nicht eine systematische Vollständigkeit nach irgendeiner Richtung hin, sondern gibt eine Auswahl aus der neueren Atom- und Elektronenphysik. Der Verfasser bemüht sich dabei, das „experimentelle Atom" und das „experimentelle Elektron" herauszuarbeiten gegenüber den „theoretischen Atomen und Elektronen"; z. B. sind Masse, magnetisches Moment und abtrennbare Ladung für ihn die einzigen Eigenschaften der Atome, die von der Erfahrung verlangt und auch bestätigt werden. Die ersten beiden Kapitel behandeln demnach die experimentellen Methoden zur Bestimmung der absoluten und spezifischen Elektronenladung, der Atommasse und des magnetischen Atommoments. Im nächsten Kapitel werden an Hand des periodischen Systems die periodischen und die nichtperiodischen Eigenschaften der Elemente erläutert. Das vierte und fünfte Kapitel behandeln die Ablenkung von α-Teilchen und von Elektronen durch Atome; dabei werden besonders eingehend diejenigen Versuche von Davisson über Elektronenreflexion erläutert, deren Fortsetzung bekanntlich zur Beobachtung von Kristallgitter-Elektroneninterferenzen geführt hat. Im nächsten ziemlich umfangreichen Kapitel wird an Hand der „korpuskularen" Eigenschaften des Lichtes (lichtelektr. Effekt, kurzwellige Grenze des Röntgenspektrums, Comptoneffekt), der Dualismus: Wellen und Korpuskeln ausführlich diskutiert. Mit dem folgenden Kapitel über Ionisation beginnt die Überleitung in die Spektroskopie; die Elektronenstoßversuche, eine Anzahl ausgewählter Daten aus der Spektroskopie und ihre Deutung auf Grund der Bohrschen Theorie bilden den Gegenstand der Kapitel 8 bis 12. Das letzte Kapitel, Elektrizitätsleitung in Gasen, fällt etwas aus dem Rahmen des übrigen heraus; es steht nur insofern in Zusammenhang mit den früheren Kapiteln, als die meisten der dort beschriebenen Ergebnisse aus Untersuchungen über den Elektrizitätsdurchgang durch (verdünnte) Gase hervorgegangen sind. Bei der Beschreibung der Apparatur von I. Danysz auf S. 186 im Abschnitt „Abtrennung von festgebundenen Elektronen von Atomen" ist dem Verf. ein Irrtum unterlaufen. Die Elektronenquelle S wurde bei Danysz nicht mit „X-Strahlen, die von einer Quelle links außerhalb der Zeichnung kamen", bestrahlt, wie dort angegeben, sondern Danysz hat β-Strahlenspektren photographiert; magnetische Spektren der von Röntgenstrahlen emittierten Elektronen sind erst später von anderen Autoren (de Broglie, Robinson, Whiddington) erhalten worden. Der Irrtum scheint dem Ref. darauf zu beruhen, daß im Englischen die Bezeichnung „β-rays" häufig ganz allgemein für alle Elektronenstrahlen großer Geschwindigkeit benutzt wird.

Das geistreich und anregend geschriebene Buch ist mit Genuß zu lesen; es ist aber recht bezeichnend für das heutige außerordentlich rasche Tempo der wissenschaftlichen Entwicklung, daß man ein Jahr nach dem Erscheinen des Buches beim Lesen schon beinahe auf Schritt und Tritt auf Dinge stößt, die inzwischen ganz merklich fortgeschritten sind. Ich erinnere nur an die Verfeinerung der Messung kleiner magnetischer Momente, an die „Elektroneninterferenzen", an die Massendefekte der Atome, die durch Erhöhung der Genauigkeit der Massenspektrogramme gemessen werden konnten und an die völlige Überbrückung des von Darrow noch „unerforscht" genannten Wellenlängengebiets im kurzwelligsten Ultraviolett; auch das Kapitel „Wellen und Korpuskeln" würde vielleicht in dem Buche „Introduction to Contemporary Physics 1927" etwas anders ausgesehen haben. Fritz Kirchner.

L. Prandtl und A. Betz, Ergebnisse der Aërodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen (angegliedert dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung). III. Lieferung. 4°. V u. 166 S. Mit 149 Abb. München u. Berlin, R. Oldenbourg. 1927. M. 14.50, geb. M. 16.50.

Nach 4jähriger Unterbrechung (vgl. die Besprechung der beiden ersten Lieferungen diese Zeitschr. 25, 308, 1924) erscheint hier wieder ein umfangreicher Tätigkeitsbericht der Aërodynamischen Versuchsanstalt. Die Einteilung des Stoffes nach dem gewohnten Programm: erst einige theoretische Ergebnisse, dann neue Versuchseinrichtungen der Anstalt und schließlich zahlreiche neue Versuchsergebnisse.

Den Reigen der theoretischen Abhandlungen eröffnet ein Aufsatz von Prandtl: Über den Reibungswiderstand strömender Luft. Prandtl schildert hier selbst ausführlicher den Gedankengang seiner Ähnlichkeitsbetrachtung, die von dem empirischen Widerstandsgesetz der Röhrenströmung auf ein Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt führt, und gibt eine Anwendung für den Widerstand einer angeströmten Platte parallel zum Luftstrom, die durch die Versuche sehr gut bestätigt wird. Es folgt, ebenfalls von Prandtl: „Über Wirbelablösung und deren Verhinderung“ mit schönen Lichtbildern von Strömungen um ruhende und rotierende Zylinder. Fortführungen der Tragflügeltheorie enthalten die folgenden drei Aufsätze: Prandtl, Über den Einfluß der Stromlinienkrümmung auf den Auftrieb von Doppeldeckern; O. Schrenck, Theoretisches über die Joukowsky-Profile; Prandtl, Der induzierte Widerstand von Flügeln mit Endscheiben. Schließlich noch ein Aufsatz von Betz, Theoretisches über Windräder, in dem die maximale Leistung eines Rades von gegebenem Durchmesser berechnet wird.

An neuen Versuchseinrichtungen der Anstalt werden beschrieben kleine Drehstrommotoren zum Antrieb von Modellpropellern (nach Ackeret), die gestatten, die Flugzeugmodelle mit laufendem Propeller zu untersuchen. Diese kleinen Drehstrommotoren stellen die Lösung des enorm schwierigen Problems dar, einen Antriebsmechanismus zu finden, welcher trotz entsprechender Leistung von der Größenordnung 1 PS so kleine Abmessungen hat, daß die Strömung durch ihn nicht wesentlich gestört wird.

Von den 22 Abhandlungen über Versuchsergebnisse beziehen sich 15 auf flugtechnische Fragen, die übrigen 7 auf andere Fragen und zeigen damit, daß die Anstalt mehr und mehr auch anderen Luftwiderstandsproblemen nutzbar gemacht wird. Von den flugtechnischen Ergebnissen sei hervorgehoben die Untersuchung weiterer Profile, wobei jetzt statt der großen Profilbilder Zahlentabellen der Profilkoordinaten mitgeteilt werden. Ferner Versuche über Flügel mit Ausschnitten, über solche mit Endscheiben (wie beim Flettnerrotor), über solche mit Klappen und Spalt über die Beeinflussung der Eigenschaften von Tragflügeln durch Motorgondeln und schließlich Untersuchungen einiger ganzer Flugzeugmodelle.

Die nicht flugtechnischen Arbeiten beziehen sich auf die Druckverteilungen an gestaffelten Flügelgittern (von Bedeutung für den Turbinenbau), auf Windräder, auf den Winddruck an einem Gasbehälter, an ganzen Brückenträgern, an einzelnen Profilträgern. Von besonderem Interesse sind schließlich noch zwei Untersuchungen, die auf Veranlassung der Reichsbahndirektion Hannover bzw. der Studiengesellschaft für die Rheinisch-Westfälische Schnellbahn ausgeführt wurden. Die erstere bezieht sich auf Windschutzgitter zur Verhinderung störenden Windeinflusses auf abrollende Wagen beim Rangierbetrieb, die letztere auf einen Schnellbahnwagen bei Fahrt auf freier Strecke und im Tunnel und auf den Druckverlauf am Wagen bei der Begegnung zweier Züge in einem Tunnel.

Im Anhang ist noch ein Literaturverzeichnis von weiteren 48 Publikationen des Göttinger Kreises aufgeführt, die seit dem Erscheinen des letzten Heftes gedruckt wurden und einen weiteren Beweis seiner reichen Fruchtbarkeit darstellen.

Das ganze Heft wieder ein Muster konzentrierter Qualitätsarbeit! Wenn es gestattet ist, einen formalen Wunsch auszusprechen, so wäre es nur der, daß die Verfasser der einzelnen Artikel bzw. die Versuchsleiter statt nur im Vorwort auch bei den Arbeiten selbst zu finden wären. L. Schiller.

K. Goldschmidt, Aluminothermie. (Chemie und Technik der Gegenwart, Bd. V.) 8°. VII u. 174 S. Mit 81 Abb. im Text, 1 farb. Tafel u. 1 Bildnis. Leipzig, S. Hirzel. 1925. Geh. M. 10.—, geb. M. 12.—.

Der Verfasser ist der Bruder und langjährige Mitarbeiter des Erfinders der aluminothermischen Verfahren, Prof. Dr. Hans Goldschmidt, der selbst kurz vor seinem Tode die Herausgabe eines solchen Buches plante. Zwei einleitende Kapitel behandeln die Geschichte der Aluminiumgewinnung und die der Thermitreaktion (Reduktion von Metalloxyden durch Aluminium). Die eigentliche Entdeckung Goldschmidts besteht nicht in der schon bekannten Reaktion selbst, sondern in der Erkenntnis, daß sie durch lokale Zündung ohne Vorwärmen einzuleiten und daher kontinuierlich zu führen ist. Die weiteren Kapitel behandeln Metallgewinnung und Schweißung in technischer und historischer Beleuchtung, ohne Spezialkenntnisse zu verlangen, und in interessanter Darstellung. Besonders hervorzuheben ist die ausgezeichnete Ausstattung des Buchs hinsichtlich Papier, Druck und Illustration. G.-M. Schwab.

Nachtrag zu dem Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1927/28 der Universität Hamburg.

Möller: Elektronenbewegung in Radioröhren mit Demonstrationen, 1; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten Fortgeschrittener, tägl.; Wechselstromtechnik mit Übungen und Demonstrationen 3; Elektrotechnisches Praktikum, 5; Landwirtschaftliche Maschinenlehre, 1. —

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ehrung: Dem ord. Professor der Chemie an der Universität Würzburg Dr. Otto Dimroth wurde der Titel eines Geheimen Regierungsrates verliehen.

In den Ruhestand: Der ord. Professor für allgemeine Chemie an der Technischen Hochschule Graz Dr. Viktor Cordier-Löwenhaupt.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.